

# Часть III. Теория вероятностей.

## Глава 1. Основные понятия теории вероятностей.

### §1. Элементы комбинаторики.

**Определение 1.** Комбинаторика – это раздел математики, изучающий вопросы о том, сколько комбинаций определенного типа можно составить из данных предметов.

**Определение 2.** Различные группы, составленные из каких – либо элементов, и отличающиеся одна от другой либо их порядком, либо элементами, называются *соединениями*.

Различают три вида соединений:

1. *перестановки;*
2. *сочетания;*
3. *размещения.*

**Определение 3.** Перестановками называются такие соединения из «n» элементов, которые составлены из одних и тех же элементов и отличаются только порядком следования элементов.

Обозначаются перестановки  $P_n$

$$P_n = n !$$

$$0! = 1$$

$$4! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$$

$$1! = 1$$

$$5! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120$$

$$2! = 1 \cdot 2 = 2$$

$$n! = 1 \dots (n-2)(n-1) \cdot n$$

$$3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$$

**Пример:** Сколькими способами можно разместить 5 человек за одним столом?  
 $n = 5$ ;  $P_5 = 5! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120$

**Определение 4.** Сочетаниями называются такие соединения, которые взяты из «n» элементов по «m» в каждом и отличаются друг от друга хотя бы одним элементом (порядок следования элементов не учитывается).

$$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}$$

**Пример:** Сколькими способами можно заполнить карточки спортлото 6 из 49?

$$\begin{array}{l|l} n = 49 \\ m = 6 \\ C_{49}^6 - ? \end{array} \left| \begin{array}{l} C_{49}^6 = \frac{49!}{6!(49-6)!} = \frac{\cancel{49}!^{44 \cdot 45 \cdot 46 \cdot 47 \cdot 48 \cdot 49}}{6! \cancel{43}!} = \frac{\overset{11}{\cancel{44}} \cdot \overset{3}{\cancel{45}} \cdot \overset{23}{\cancel{46}} \cdot 47 \cdot \overset{8}{\cancel{48}} \cdot 49}{1 \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{4} \cdot \cancel{5} \cdot \cancel{6}} = \\ = 11 \cdot 3 \cdot 23 \cdot 47 \cdot 8 \cdot 49 = 13\,983\,816 \end{array} \right.$$

**Определение 5.** Размещениями называются соединения из «n» элементов по «m» в каждом, отличающиеся одно от другого как самими элементами, так и их порядком.

$$A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!}$$

**Пример:** Сколькими способами можно составить расписание, состоящее из 3-х пар на 1 день по 7 предметам.

$$\begin{array}{l|l} n = 7 \\ m = 3 \\ A_7^3 - ? \end{array} \left| \begin{array}{l} A_7^3 = \frac{7!}{(7-3)!} = \frac{\cancel{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7}{\cancel{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}} = 210 \end{array} \right.$$

## §2. Предмет теории вероятностей.



В единичных случаях наступление многих явлений заранее предсказать нельзя, но если рассматривать их как массовые, однородные явления, то выявляются определенные закономерности.

**Например,** при подбрасывании монеты нельзя предсказать, какой стороной она упадет (орел или решка), при достаточно большом числе бросаний вскрывается закономерность: орел и решка выпадают приблизительно поровну.

Рождение близнецов - случайное событие, но при изучении этого события как массового, установлена закономерность: на каждые 1000 родов приходится в среднем 12 двойняшек и на каждые 8000 родов - 1 тройня.

Устойчивость обнаруживают все массовые однородные явления: всхожесть семян,

урожайность культур, плодovitость и продуктивность животных, число поражений мишени при большом числе выстрелов из одного и того же орудия и т.д.

Изучение закономерностей однородных массовых случайных явлений составляет предмет теории вероятностей и основанной на ней математической статистики.

### §3. Основные понятия теории вероятностей. Пространство элементарных событий.

*Испытание* - это опыт, наблюдение, эксперимент.

*Событие* – это результат (исход) испытания.

**Пример:** сев зерен – испытание; всходы – событие

События обозначают заглавными буквами латинского алфавита: А, В, С, ... .

**Определение 3.** Событие называется *случайным*, если при данных испытаниях оно

может произойти или нет; **достоверным**, если обязательно произойдет при данных испытаниях; **невозможным**, если при данных испытаниях никогда не произойдет.

### Случайные события:





**Пример: Бросают игральную кость.**

**Выпало 6 очков – событие случайное**

**- || - четное число очков – событие достоверное**

**- || - 0 очков событие невозможное.**

**Множество всех исходов данного явления называется пространством элементарных событий, относящихся к этому явлению.**

#### **§4. Классификация случайных событий. Множество всех исходов данного**

**Определение 1.** Событие  $\bar{A}$ , состоящее в не появлении события  $A$ , называется ему *противоположным*.

**Пример:**  $A$  – попадание в цель;  $\bar{A}$  – промах.

**Определение 2.** События  $A$ ,  $B$ ,  $C$  называются *несовместными*, если в условиях данных испытаний возможно появление только одного из них, т.е. они не могут появиться одновременно.

**Пример:**

$A$ – выпало 1 очко	}	события несовместные
$B$ – выпало 4 очка		
$C$ – выпало 6 очков		

**Замечание.**

**Противоположные события** – это частный случай несовместных событий.

**Определение 3.** События  $A$  и  $B$  называются *независимыми*, если появление одного из них изменяет вероятность наступления другого.

**Пример:** Два стрелка стреляют в цель.



$$\left. \begin{array}{l} A - \text{попал 1-й стрелок} \\ B - \text{попал 2-й стрелок} \end{array} \right\} \text{независимые события}$$

**Определение 4.** События *A* и *B* называются *равновозможными*, если нет оснований считать, что в данных испытаниях событие *A* произойдет чаще, чем событие *B*.

**Пример:** При подбрасывании монеты выпадет орел или решка.

**Определение 5.** События *A*, *B* и *C* называются *единственно возможными*, если при данных испытаниях произойдет одно из них и никакое другое.

**Пример:** Светофор – после красного загорится желтый, затем - зеленый и т.д.

**Определение 6.** Совокупность всех несовместных и единственно возможных событий называется *полной системой событий*.

**Пример:** Шкала оценок (1-5); число очков на игральной кости (1-6).

## §5. Классическое определение вероятности.

Используется, когда исходы равновозможны и число их конечное.

**Определение 1.** *Вероятностью события  $A$  называется отношение числа благоприятствующих данному событию исходов к общему числу всех возможных и равновозможных исходов испытания.*  
**Это классическое определение вероятности.**

$$P(A) = \frac{m}{n}$$

**Пример:** В коробке 30 карандашей, из них 5 красных. Карандаши перемешали. Какова вероятность того, что достанем красный карандаш.

$$\left. \begin{array}{l} n = 30 \\ m = 5 \\ P(A) = ? \end{array} \right| P(A) = \frac{5}{30} = \frac{1}{6}$$

### Свойства вероятностей событий:

**1. Вероятность достоверного события = 1**

$$m = n ; \quad P(D) = \frac{m}{n} = \frac{n}{n} = 1$$

**2. Вероятность невозможного события = 0**

$$m = 0 \quad P(H) = \frac{m}{n} = \frac{0}{n} = 0$$

**3. Вероятность случайного события находится в пределах от 0 до 1, т.е. это правильная положительная дробь.**

$$0 < P(C) < 1$$

**4. Вероятность любого события удовлетворяет неравенству:**

$$0 \leq P(A) \leq 1$$

### §6. Относительная частота (частость) события.

Пусть произведено  $N$  независимых испытаний на наступление события  $A$  и пусть событие  $A$  наступило ровно  $M$  раз.

**Определение 1.** *Относительной частотой* события  $A$  называется отношение числа испытаний, в которых событие наступило к общему числу проведенных испытаний.

$$W(A) = \frac{M}{N}$$

$P(A)$  – до опыта

$W(A)$  – после проведения опыта

**Пример:** В партии 100 изделий, из которых 4-бракованные. Какова частота появления бракованного изделия?

$$\left. \begin{array}{l} N = 100 \\ M = 4 \\ W(A) = ? \end{array} \right| W(A) = \frac{4}{100} = 0,04$$

## §7. Статистическая вероятность события.

Пусть проведена серия **N**- испытаний

$N_1$  - **событие A** наступило  $M_1$  раз

$N_2$  - **событие A** наступило  $M_2$  раз

.....

$N_k$  - **событие A** наступило  $M_k$  раз.

$$W_1 = \frac{M_1}{N_1}; \quad W_2 = \frac{M_2}{N_2}; \quad \dots; \quad W_k = \frac{M_k}{N_k}, \text{ т.е.}$$

Получена последовательность частот

$W_1, W_2 \dots W_k \dots$

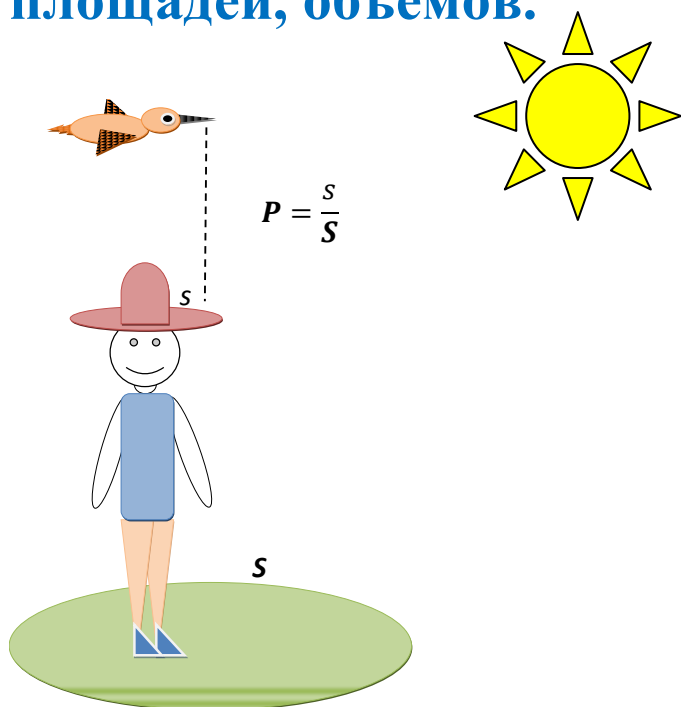
**Определение 1.** Предел последовательности относительных частот при  $N \rightarrow \infty$  называется **статистической вероятностью события**.

$$\tilde{P}(A) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{M}{N}$$

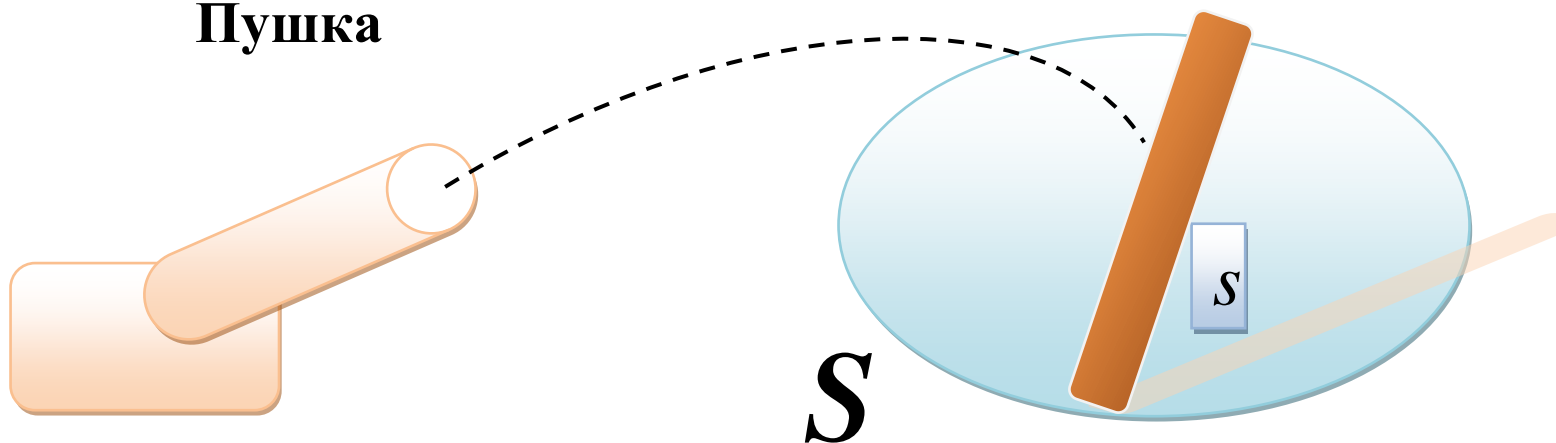
Статистическое определение вероятности, как и понятия и методы теории вероятностей в целом, применимы не к любым событиям с неопределенным исходом, а только к тем из них, которые обладают определенными свойствами.

## §8. Геометрическое определение вероятности.

**Определение 1.** *Геометрической вероятностью* события *A* называется отношение геометрических мер: длин, площадей, объемов.



Пушка



Мост

**Пример.** Произошел обрыв телефонной линии, соединяющей пункты **A** и **B**, расстояние между которыми 2000м.  
Какова вероятность того, что обрыв произошел в 400м от пункта **A**?

**Решение.**

$$L=2000, \quad l=400$$

$$P=400:2000=0,2$$

## §9. Алгебра событий.

**Определение 1.** *Суммой* (объединением) двух событий **A** и **B** называют такое событие **C**, которое состоит в том, что наступит хотя бы одно из этих событий.

$$C = A + B \quad ; \quad C = A \cup B$$

Для совместных событий: или  $A$ , или  $B$ , или  $A$  и  $B$  вместе.

Для несовместных событий: или  $A$ , или  $B$ .

Пример:  $A$  - 1-й стрелок попал

$B$  - 2-й стрелок попал

$C = A + B$  – цель поражена

**Определение 2.** Произведением (совмещением) двух событий  $A$  и  $B$  называется такое событие  $C$ , которое состоит в совместном наступлении событий  $A$  и  $B$ .

$$C = A \cdot B \quad ; \quad C = A \cap B$$

и событие  $A$ , и событие  $B$ .

Пример:  $A$  - 1-й стрелок попал

$B$  - 2-й стрелок попал

$C = A \cdot B$  – оба стрелка попали.

Пример: Пусть  $A$  – высказывание «Первая бригада выполнила план»,  $B$  – высказывание «Вторая бригада выполнила план». Записать в виде формул следующие высказывания:

а) «Хотя бы одна бригада выполнила план»



- б) «Обе бригады выполнили план»
- в) «Ни одна бригада не выполнила план»
- г) «План выполнила только первая бригада»
- д) «План выполнила только вторая бригада»
- е) «План выполнила только одна бригада»

Решение:

- а)  $A+B$
- б)  $A \cdot B$
- в)  $\bar{A} \cdot \bar{B}$
- г)  $A \cdot \bar{B}$
- д)  $\bar{A} \cdot B$
- е)  $A \cdot \bar{B} + A \cdot \bar{B}$

## §10. Понятие условной вероятности.

Как отмечено выше, вероятность  $P(B)$  как мера степени объективной возможности наступления события  $B$  имеем смысл при выполнении определенного комплекса условий. При изменении условий вероятность события  $B$  может измениться.

**Определение 1.** Вероятность события  $B$ ,

зависящего от  $A$ , вычисленная при условии, что произошло  $A$ , называется **условной вероятностью** события  $B$  и обозначается.

$$P_A(B)$$

**Пример:** Для некоторой местности среднее число дождливых дней в августе равно 15. К.в.т.,ч. 2-го августа будет дождь?

Пусть  $A$  – событие 1.08 – дождь,

$B$  – событие 2.08 - дождь

$n = 31$ $\underline{m_\partial = 15}$	И.если $A$ произошло	И.если $A$ не произошло
	$A$ – 1.08 - дождь	1.08 - ясно
	$B$ - 2.08 - дождь	$B$ - 2.08 - дождь
	$n = 30 \quad m_\partial = 14$	$n = 30 \quad ; \quad m_\partial = 15$
	$P(B) = \frac{14}{30}$	$P(B) = \frac{15}{30} = \frac{1}{2}$

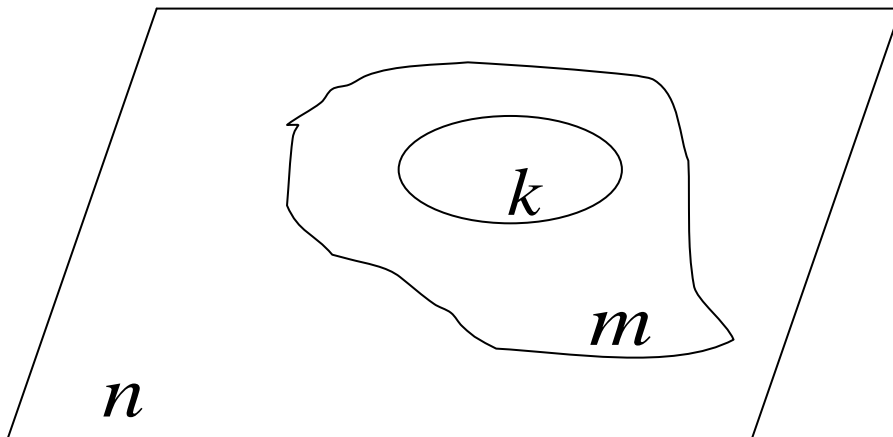
$B$  – зависит от  $A$ ,  $P_A(B) = \frac{14}{30}$

## §11. Теорема умножения двух зависимых событий.

**Теорема.** Вероятность совместного наступления двух зависимых событий  $A$  и  $B$  равна произведению вероятности одного из них на условную вероятность другого, в предположении, что первое событие уже произошло.

$$P(A \cdot B) = P(A) \cdot P_A(B) \quad (1)$$

**Доказательство:** Пусть проводится « $n$ » независимых испытаний.



Событие  $A$  благоприятствует  $m$  исходам ( $m \leq n$ ). Событие  $B$  благоприятствует  $k$  исходам ( $k \leq m$ ), при условии, что событие  $A$  произошло.

Тогда

$P(A) = \frac{m}{n}$  ;  $P_A(B) = \frac{k}{m}$ , а т.к. события **A** и **B** могут произойти вместе только в «k» случаях, то

$$P(A \cdot B) = \frac{k}{n} ; P(A \cdot B) = \frac{k}{n} = \frac{k}{m} \cdot \frac{m}{n} = P(A) \cdot P_A(B) ,$$

**ч.т.д.**

**Следствие 1.** Теорема (1) легко обобщается на случай произвольного числа событий

$$P(A_1 \cdot A_2 \cdot A_3 \cdot \dots \cdot A_n) = P(A_1) \cdot \underset{A_1}{P(A_2)} \cdot \underset{A_1 A_2}{P(A_3)} \cdot \dots \cdot \underset{A_1 \dots A_{n-1}}{P(A_n)}$$

При этом вероятность каждого последующего события вычисляется в предположении, что все предыдущие события произошли.

**Следствие 2.** Для любого из событий **A** и **B** справедливо равенство

$$P(A \cdot B) = P(A) \cdot P_A(B) = P(B) \cdot P_B(A) , \quad \text{т.е.}$$

теорема (1) обладает коммутативностью умножения  $A \cdot B = B \cdot A$

**Пример:** См. условие предыдущей задачи. К.в.т.,ч. 1, 2, 3 августа будут дождливы?

**A** – 1.08. – дождь

**B** – 2.08. – дождь

**C** – 3.08. – дождь

$$P(A \cdot B \cdot C) = P(A) \cdot P_{A \cdot B}(B) \cdot P_{A \cdot B \cdot C}(C)$$

$$P(A) = \frac{15}{31} \quad ; \quad P_A(B) = \frac{14}{30} \quad ; \quad P_{A \cdot B}(C) = \frac{13}{29}$$

$$P(A \cdot B \cdot C) = \frac{\cancel{15}}{31} \cdot \frac{\overset{7}{\cancel{14}}}{\underset{8}{\cancel{30}}} \cdot \frac{13}{29} = \frac{91}{899} = 0,1$$

## §12. Теорема умножения для независимых событий.

Пусть события  $A$  и  $B$  – независимы, тогда  $P_A(B) = P(B)$

Теорема. Вероятность совместного наступления двух независимых событий  $A$  и  $B$  равна произведению вероятностей этих событий.

$$\boxed{P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(B)} \quad (2)$$

Следствие. Вероятность совместного появления нескольких событий, независимых

**в совокупности, равна произведению вероятностей этих событий.**

$$P(A_1 \cdot A_2 \cdot A_3 \cdot \dots \cdot A_n) = P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot P(A_3) \cdot \dots \cdot P(A_n)$$

**Пример:** Имеется 3 ящика, содержащих по 10 деталей. В первом ящике 8, во втором 7 и в третьем 9 стандартных деталей. Из каждого ящика наудачу выбирают по одной детали. К.в.т.,ч. все три вынутые детали окажутся нестандартными?

А- нестандартная деталь из 1-го ящика				независимые
В-	-  -	-  -	-  -	
С-	-  -	-  -	-  -	
				2-го ящика
				3-го ящика

$$P(A) = \frac{2}{10} \quad ; \quad P(B) = \frac{3}{10} \quad ; \quad P(C) = \frac{1}{10}$$

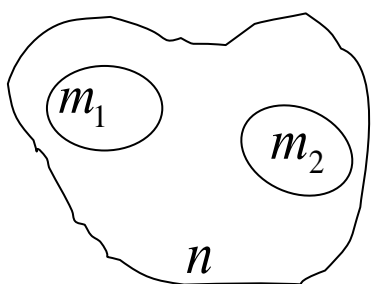
$$P(A \cdot B \cdot C) = P(A) \cdot P(B) \cdot P(C) = 0,2 \cdot 0,3 \cdot 0,1 = 0,006$$

### §13. Теорема сложения вероятностей несовместных событий.

**Теорема.** Вероятность наступления хотя бы одного из двух несовместных событий ***A*** или ***B*** равна сумме вероятностей этих событий.

$$\boxed{P(A + B) = P(A) + P(B)} \quad (3)$$

**Доказательство:**



Пусть проводится серия «*n*» независимых испытаний. Событию ***A*** благоприятствует

«*m*<sub>1</sub>» исходов. Событию ***B*** благоприятствует

«*m*<sub>2</sub>» исходов

$$P(A) = \frac{m_1}{n} \quad ; \quad P(B) = \frac{m_2}{n}$$

Т.к. события ***A*** и ***B*** несовместные, то ни один из случаев, благоприятствующих одному из этих событий, не благоприятствует другому.

Поэтому событию  $(A+B)$  будет благоприятствовать  $(m_1 + m_2)$  случаев.

Следовательно,

$$P(A + B) = \frac{m_1 + m_2}{n} = \frac{m_1}{n} + \frac{m_2}{n} = \underline{P(A) + P(B)}, \text{ ч.т.д.}$$

**Пример:** В денежно - вещевой лотерее на каждые 10000 билетов разыгрывается 150 вещевых и 50 денежных выигрышей. Чему равна вероятность выиг

$n = 10000$	$C$ – выигрыш	
$m_g = 150$	$A$ – вещевой выигрыш	несовместные
$m_d = 50$	$B$ – денежный выигрыш	
$P(C) - ?$	$C = A + B$ (или вещевой, или денежный)	
	$P(C) = P(A + B) = P(A) + P(B) = \frac{150}{10000} + \frac{50}{10000} = \frac{200}{10000} = 0,02$	

**Следствие 1.** Данная теорема справедлива для «n» несовместных событий.

$$P(A_1 + A_2 + \dots + A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \dots + P(A_n)$$

**Следствие 2.** Сумма вероятностей событий, образующих полную систему, равна 1.



$$P(A_1) + P(A_2) + \dots + P(A_k) = 1$$

**Доказательство:** Если  $A_1, A_2, \dots, A_k$  - события несовместные и единственно возможные, то они образуют полную систему событий.

Так как события  $A_1, A_2, \dots, A_k$  единственно возможные, то событие  $(A_1 + A_2 + \dots + A_k)$ , состоящее в появлении хотя бы одного из этих событий, является событием достоверным, т.е. его вероятность равна 1.

$$P(A_1 + A_2 + \dots + A_k) = 1$$

В силу того, что события  $A_1, A_2, \dots, A_k$  - несовместные, к ним применима теорема сложения вероятностей, т.е.

$$P(A_1 + A_2 + \dots + A_k) = \underline{P(A_1) + P(A_2) + \dots + P(A_k) = 1}$$

ч.т.д.

**Следствие 3.** Сумма вероятностей противоположных событий равна 1.

$$P(A) + P(\bar{A}) = 1,$$

$A$  – данное событие,  $\bar{A}$  – где противоположное событие.

Данное утверждение следует из того, что противоположные события образуют полную

систему событий. Принято обозначать  $P(A) = p$ ;  $P(\bar{A}) = q$ . Следовательно  $p + q = 1$ .

**Пример.** Если вероятность попадания в цель  $p = 0,8$ , то вероятность промаха  $q = 0,2$ .

## §14. Теорема сложения для совместных событий.

**Теорема.** Вероятность появления хотя бы одного из двух совместных событий равна сумме вероятностей этих событий без вероятности их совместного наступления.

$$P(A + B) = P(A) + P(B) - P(A \cdot B) \quad (4)$$

В случае 3-х и более совместных событий формула будет очень громоздка. Так, для 3-х событий:

$$P(A + B + C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(AB) - P(AC) - P(BC) + P(ABC)$$

Поэтому проще перейти к противоположному событию и использовать формулу:

$$P(A_1 + A_2 + \dots + A_k) = 1 - P(\bar{A}_1) \cdot P(\bar{A}_2) \cdot \dots \cdot P(\bar{A}_k)$$

или  $P(A) = 1 - q_1 \cdot q_2 \cdot q_3 \cdot \dots$ , т.е.

**Определение 1.** Вероятность суммы событий  $A_1, A_2 \dots A_k$ , независимых в

совокупности, равна разности между единицей и произведением вероятностей противоположных событий  $\overline{A_1} ; \overline{A_2} \dots \overline{A_k}$ .

Частный случай. Если события  $A_1, A_2 \dots A_k$  имеют одинаковую вероятность, равную «р», то вероятность появления хотя бы одного из этих событий равна:  
 $P(A) = 1 - q^k$

**Пример:** В типографии имеется 4 плоскостатные машины. Для каждой машины вероятность того, что она работает в данный момент = 0,9. К.в.т., ч. в данный момент работает хотя бы одна машина (событие  $A$ ).

$p = 0,9$		$P(A) = 1 - q^4 = 1 - (0,1)^4 = 1 - 0,0001 = 0,9999$
$q = 1 - 0,9 = 0,1$		
$P(A) = ?$		

Замечание. При использовании формулы (4) следует иметь в виду, что события  $A$  и  $B$  могут быть как независимыми, так и зависимыми.

Для независимых событий:

$$P(A + B) = P(A) + P(B) - P(A) \cdot P(B)$$

### Для зависимых событий:

$$P(A + B) = P(A) + P(B) - P(A) \cdot P_A(B)$$

**Пример 1:** Устройство содержит два независимо работающих элемента. Вероятность отказа 1-го из них – 0,05; 2-го – 0,08. К.в.т., ч. откажет все устройство, если для этого достаточно, чтобы отказал хотя бы один элемент?

$P_1 = P(A_1) = 0,05$	$A_1$ и $A_2$ – совместные события, независимые
$P_2 = P(A_2) = 0,08$	
$P(A_1 + A_2) = ?$	
$q_1 = 0,95$	
$q_2 = 0,92$	1) $P(A_1 + A_2) = P(A_1) + P(A_2) - P(A_1) \cdot P(A_2) = 0,05 + 0,08 - 0,05 \cdot 0,08 = 0,13 - 0,004 = 0,126$
	2) $P(A_1 + A_2) = 1 - q_1 \cdot q_2 = 1 - 0,95 \cdot 0,92 = 1 - 0,874 = 0,126$

**Пример 2:** На 100 лотерейных билетов приходится 5 выигрышных. К.в. выигрыша хотя бы по одному билету, если приобретено 2.

$$\begin{array}{l|l} n=100 & \left. \begin{array}{l} A_1 - \text{выиграл 1-й билет} \\ A_2 - \text{выиграл 2-й билет} \end{array} \right| \text{совместные, зависимые} \\ m=2 & P(A_1 + A_2) = P(A_1) + P(A_2) - P(A_1) \cdot P(A_2) = \frac{5}{100} + \frac{5}{100} - \frac{5}{100} \cdot \frac{4}{99} = 0,098 \\ & \Rightarrow \text{оба : 2-ой билет выиграет, если выиграл 1-й} \end{array}$$

## §15. Вероятность появления только одного события.

Пусть вероятности появления каждого из двух независимых событий  $A_1$  и  $A_2$  соответственно равны  $p_1$  и  $p_2$ . Найдем вероятность появления только одного из этих событий.

Имеем событие  $\overline{A_1} A_2 + A_1 \overline{A_2}$

$$P = p_1 \cdot q_2 + q_1 \cdot p_2$$

**Пример:** Два стрелка стреляют по мишени. Вероятность попадания в мишень при одном выстреле для 1-го стрелка = 0,7, для 2-го = 0,8. К.в.т.,ч. при одном залпе в мишень попадет только один стрелок.

$p_1 = 0,7$		$P = p_1 \cdot q_2 + q_1 \cdot p_2 = 0,7 \cdot 0,2 + 0,3 \cdot 0,8 = 0,14 + 0,24 = 0,38$
$p_2 = 0,8$		
$q_1 = 0,3$		
$q_2 = 0,2$		
$P - ?$		

## §16. Формула полной вероятности.

### Формула Байеса.

**Теорема.** Если событие  $A$  может произойти только при условии появления одного из событий (гипотез)  $B_1, B_2, \dots, B_n$ , образующих полную систему событий, то вероятность события  $A$  равна сумме произведений вероятностей каждого из этих событий (гипотез) на соответствующие условные вероятности события  $A$ .

$$P(A) = \sum_{i=1}^n P(B_i) \cdot P_{B_i}(A), \text{ где } i = 1, 2, \dots, n$$

### Доказательство:

По условию события (гипотезы)  $B_1, B_2, \dots, B_n$  образуют полную систему  $\Rightarrow$  они единственно возможные и несовместные. Т.к.

гипотезы  $B_1, B_2, \dots, B_n$  - единственно возможные, а событие  $A$  по условию теоремы может произойти только вместе с одной из гипотез, то

$$A = B_1 \cdot A + B_2 \cdot A + \dots + B_n \cdot A$$

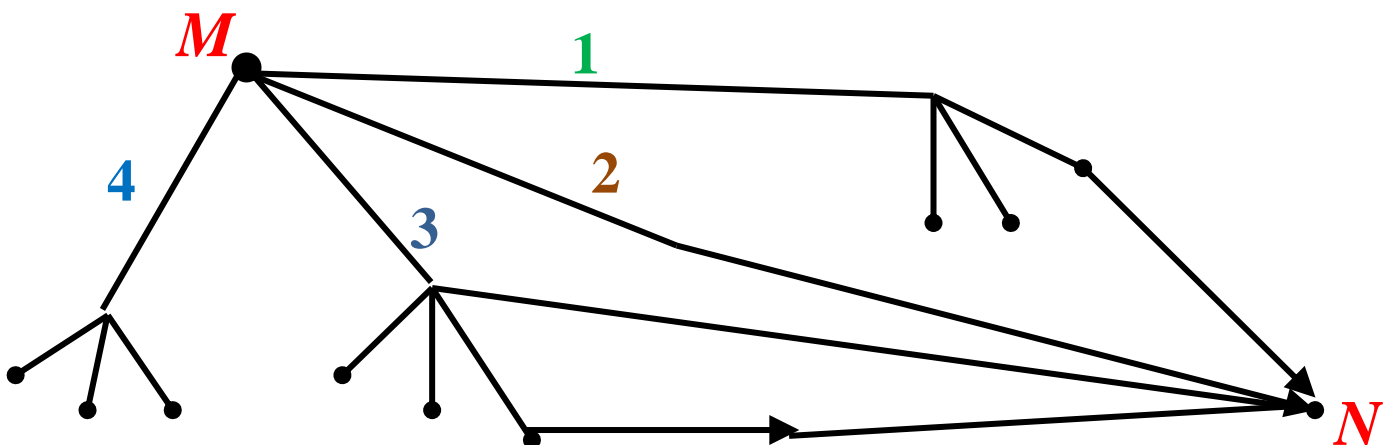
В силу того, что гипотезы  $B_1, B_2, \dots, B_n$  несовместны, можно применить теорему сложения вероятностей:

$$P(A) = P(B_1 \cdot A) + P(B_2 \cdot A) + \dots + P(B_n \cdot A) = \sum_{i=1}^n P(B_i \cdot A)$$

По теореме умножения для зависимых событий  $P(B_i \cdot A) = P(B_i) \cdot P_{B_i}(A)$ , откуда получаем

$$P(A) = \sum_{i=1}^n P(B_i \cdot A) = \sum_{i=1}^n P(B_i) \cdot P_{B_i}(A), \text{ ч.т.д.}$$

**Пример:** Известна сеть дорог между пунктами  $M$  и  $N$ .



Какова вероятность того, что путник дойдет  
из ***M*** в ***N***?

***A*** – путник дойдет.

***B*<sub>1</sub>** – пошел по **1** дороге

***B*<sub>2</sub>** - пошел по **2** дороге

***B*<sub>3</sub>** – пошел по **3** дороге

***B*<sub>4</sub>** – пошел по **4** дороге

$$P(B_1) = P(B_2) = P(B_3) = P(B_4) = \frac{1}{4}$$

$$P(A) = P(B_1) \cdot P_{B_1}(A) + P(B_2) \cdot P_{B_2}(A) + \\ + P(B_3) \cdot P_{B_3}(A) + P(B_4) \cdot P_{B_4}(A)$$

$$P_{B_1}(A) = \frac{1}{3};$$

$$P_{B_2}(A) = 1;$$

$$P_{B_3}(A) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2};$$

$$P_{B_4}(A) = 0;$$

$$P(A) = \left(\frac{1}{4}\right) \cdot \left(\frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{4}\right) \cdot (1) + \left(\frac{1}{4}\right) \cdot \left(\frac{1}{2}\right) +$$



$$+ \left(\frac{1}{4}\right) \cdot (0) = \frac{1}{4} \left(\frac{1}{3} + 1 + \frac{1}{2} + 0\right) = \frac{1}{4} \cdot \frac{11}{6} = \frac{11}{24} =$$

$$\approx 0,46$$

**Пример:** В урну, содержащую два шара, опущен белый шар, после чего из нее наудачу извлечен один шар. К.в.т.,ч. извлеченный шар окажется белым, если равновероятны все возможные предположения о первоначальном составе шаров (по цвету).

**Решение.**  $A$  - извлечен белый шар

**Гипотезы о первоначальном составе шаров:**

$B_1$  - белых шаров нет;

$B_2$  - один белый шар;

$B_3$  - два белых шара.

Т.к. все гипотезы равновероятны и сумма их вероятностей = 1, то вероятность каждой из

гипотез =  $1/3$ , т.е.  $P(B_1) = P(B_2) = P(B_3) = \frac{1}{3}$

Условная вероятность того, что будет извлечен белый шар, при условии, что первоначально в урне не было белых шаров,

$P_{B_1}(A) = 1/3$  (по первой гипотезе)

По второй гипотезе -  $P_{B_2}(A) = 2/3$

По третьей гипотезе -  $P_{B_3}(A) = 3/3 = 1$

Искомую вероятность найдем по формуле:

$$\begin{aligned} P(A) &= P(B_1) \cdot P_{B_1}(A) + P(B_2) \cdot P_{B_2}(A) + P(B_3) \cdot P_{B_3}(A) = 1/3 \cdot 1/3 + 1/3 \cdot 2/3 + 1/3 \cdot 1 = \\ &= \frac{1}{9} + \frac{2}{9} + \frac{1}{3} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3} \end{aligned}$$

Следствием теоремы умножения и формулы полной вероятности является формула Байеса.

Она применяется, когда событие **A**, которое может появиться только с одной из гипотез  $B_1, B_2, \dots, B_n$ , образующих полную систему событий, произошло и необходимо произвести количественную переоценку априорных вероятностей этих гипотез  $P(B_1), P(B_2), \dots, P(B_n)$ , известных до испытания, т.е. надо найти апостериорные (получаемые после проведения испытания) условные вероятности гипотез  $P_A(B_1), P_A(B_2), \dots, P_A(B_n)$ .

$$P_A(B_i) = \frac{P(B_i) \cdot P_{B_i}(A)}{\sum_{i=1}^n P(B_i) \cdot P_{B_i}(A)} - \text{формула Байеса}$$

### Доказательство:

Вспользуемся теоремой умножения вероятностей событий  $A$  и  $B_i$  в двух формах:  
 $P(A \cdot B_i) = P(A) \cdot P_A(B_i) = P(B_i) \cdot P_{B_i}(A),$

откуда

$$P_A(B_i) = \frac{P(B_i) \cdot P_{B_i}(A)}{P(A)}, \quad \text{с учетом формулы}$$

полной вероятности:

$$P(A) = \sum_{i=1}^n P(B_i) \cdot P_{B_i}(A) \quad \text{имеем}$$

$$P_A(B_i) = \frac{P(B_i) \cdot P_{B_i}(A)}{\sum_{i=1}^n P(B_i) \cdot P_{B_i}(A)}, \quad \text{Ч.Т.Д.}$$

**Пример:** Два автомата производят одинаковые детали, которые поступают на общий конвейер. Производительность первого автомата вдвое больше производительности второго. Первый автомат производит в среднем 60% деталей отличного качества, а второй – 84%. Наудачу

взятая с конвейера деталь оказалась отличного качества. К.в.т.,ч. эта деталь произведена первым автоматом.

Решение: **A** - деталь отличного качества;

### Гипотезы

$B_1$  - деталь произведена первым автоматом;

$B_2$  - — || — **2-м** — || — — || —

$$P(B_1) = 2/3 \quad P_{B_1}(A) = 0,6$$

$$P(B_2) = 1/3 \quad P_{B_2}(A) = 0,84$$

$$\begin{aligned} P(A) &= P(B_1) \cdot P_{B_1}(A) + P(B_2) \cdot P_{B_2}(A) = \\ &= 2/3 \cdot 0,6 + 1/3 \cdot 0,84 = 0,68 \end{aligned}$$

Искомая вероятность того, что взятая отличная деталь произведена 1-м автоматом по формуле Байеса равна:

$$P_A(B_1) = \frac{P(B_1) \cdot P_{B_1}(A)}{P(A)} = \frac{2/3 \cdot 0,6}{0,68} = \frac{10}{17}$$

## Часть III. Теория вероятностей.

## Глава 3. Повторение независимых испытаний.

### §17. Повторные независимые испытания. Формула Бернулли.



**Теорема .** Вероятность того, что в серии  $n$  – независимых испытаний с постоянной вероятностью наступления события в каждом отдельном испытании  $0 < p < 1$  и ненаступления события ( $q$ ), событие  $A$  наступит ровно  $m$  раз вычисляется по формуле БЕРНУЛЛИ:

$$P(m ; n) = C_n^m \cdot p^m \cdot q^{n-m} \text{ или}$$

$$P(m; n) = \frac{n!}{m!(n-m)!} \cdot p^m \cdot q^{n-m}, \text{ ч.т.д.}$$

**Пример:** Вероятность того, что из яйца выведется петушок -  $\frac{1}{2}$ , курочка -  $\frac{1}{2}$ .

**Что вероятнее:**

- 1) что из 4 яиц будет 2 курочки или
- 2) что из 6 яиц будет 3 курочки?  
(негодных яиц нет).

$$\begin{array}{l|l}
 1) \quad n = 4 \\
 \quad m = 2 \\
 \quad p = \frac{1}{2} \\
 \quad q = \frac{1}{2} \\
 \hline
 P(2;4) = ?
 \end{array}
 \begin{array}{l}
 P(2;4) = \frac{4!}{2!2!} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \\
 = 6 \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} = \frac{3}{8} = 0,375
 \end{array}$$

$$\begin{array}{l|l}
 2) & n = 6 \\
 & m = 3 \\
 & p = \frac{1}{2} \\
 & q = \frac{1}{2} \\
 \hline
 & P(3;6) - ?
 \end{array}
 \left|
 \begin{array}{l}
 P(3;6) = \frac{6^{4 \cdot 5 \cdot 6}}{3!3!} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \\
 = 20 \cdot \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{8} = \frac{5}{16} = 0,3125
 \end{array}
 \right.$$

$$P(2;4) > P(3;6)$$

**Ответ:** вероятнее получить **2** курочки из **4** яиц.

**Теорема Бернулли** может быть использована только при  $n \leq 10$  и  $p > 0,1$ .

Далее определим вероятность того, что в  **$n$**  – испытаниях событие наступит:

1) менее  **$m$**  раз:

$$P(0;n) + P(1;n) + \dots + P(m-1;n);$$

2) более ***t*** раз:

$$P(m+1; n) + P(m+2; n) + \dots + P(n; n);$$

3) не менее ***t*** раз:

$$P(m; n) + P(m+1; n) + \dots + P(n; n);$$

4) не более ***t*** раз:

$$P(0; n) + P(1; n) + \dots + P(m; n).$$

## §18. Локальная теорема Лапласа.



Теорема. Вероятность того, что в серии ***n*** — независимых испытаний событие ***A*** наступит ***t*** раз, если только вероятность появления события в каждом отдельном



испытании постоянна  $0 < p < 1$ , вычисляется по формуле:

$$P(m; n) \approx \frac{1}{\sqrt{npq}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}} \quad (2),$$

где  $x = \frac{m - np}{\sqrt{npq}}$

Формула тем точнее, чем больше  $n$ .

**Определение 1.** Выражение

$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}} = \varphi(x)$  - называется локальной функцией Лапласа.

Значения этой функции вычислены и помещены в специальную таблицу. Для решения задач пользуются рабочей формулой:

$$P(m; n) \approx \frac{\varphi(x)}{\sqrt{npq}}, \text{ где } x = \frac{m - np}{\sqrt{npq}}$$

Свойства функции  $\varphi(x)$

1)  $D(y): x \in R$

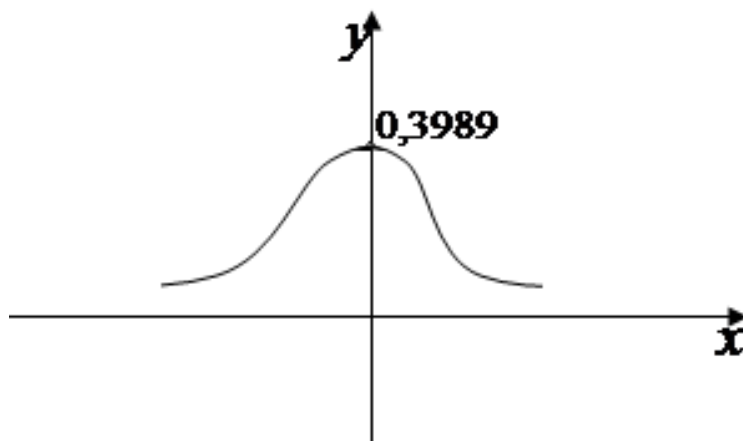
2)  $\varphi(-x) = \varphi(x)$  - функция четная, график симметричен относительно оси ОУ.

3) С осью **OX** не пересекается, так как

$e^{-\frac{x^2}{2}}$  - показательная функция и нулем быть не может.

4) В точке  **$x=0$**  функция достигает *max*  
 $\varphi_{\max}(0) \approx 0,3989$

5) При  $x \rightarrow \pm\infty$   $\varphi \rightarrow 0$



- кривая Гаусса или кривая распределения вероятностей

**Пример:** Вероятность того, что в колосе пшеницы будет ровно **40 зерен** = **0,2**. К.в.т.,ч. среди 4 тысяч колосьев будет 800 штук таких, у которых в колосе будет 40 зерен?

$n = 4000$	$x = \frac{800 - 4000 \cdot 0,2}{\sqrt{4000 \cdot 0,2 \cdot 0,8}} = 0 \quad \varphi(0) = 0,3989$
$m = 800$	
$p = 0,2$	
$q = 0,8$	
$P(800; 4000) - ?$	$P(800; 4000) \approx \frac{0,3989}{4\sqrt{40}} \approx 0,05$

### Замечания:

1. Переменную  $x$  всегда нужно вычислять с двумя знаками после запятой.
2. Если  $p < 0,1$ , то формула Лапласа дает большую погрешность.

Следовательно, формула (2) применяется, если  $n > 10$ ,  $p > 0,1$

## §19. Теорема Пуассона.

Теорема. Если вероятность  $p$  наступления события  $A$  в каждом испытании стремится к

нулю ( $p \rightarrow 0$ ) при неограниченном увеличении числа  $n$  испытаний ( $n \rightarrow \infty$ ), причем произведение  $n \cdot p$  стремится к постоянному числу  $\lambda (np \rightarrow \lambda)$ , то вероятность  $P(m; n)$  того, что событие  $A$  появится  $m$  раз в  $n$  независимых испытаниях, удовлетворяет предельному равенству:

$$P(m; n) \approx \frac{\lambda^m}{m!} \cdot e^{-\lambda}, \text{ где } \boxed{\lambda = n \cdot p}$$

Это формула Пуассона (формула редких событий).

1. Формула Пуассона используется при  $(n \cdot p \cdot q) < 9; (p < 0,1)$

2. Параметр  $\lambda$  можно искать иначе, если указано среднее число  $\lambda_1$  появления события за единицу какой –нибудь области и размер области, то тогда  $\boxed{\lambda = \lambda_1 \cdot S}$ .

3. Закону Пуассона подчиняются:

а) Число  $\alpha$ - частиц, испускаемых радиоактивным изотопом в единицу времени;

б) Число вызовов, поступающих на телефонную станцию в единицу времени;

в) Число самолетов, принимающих в аэропорт за какую-нибудь единицу времени.

**Теорема Пуассона** чаще всего применяется в теории массового обслуживания.

**Пример 1:** Завод отправил на базу 5000 доброкачественных изделий. Вероятность того, что в пути изделие повредится = 0,0002. К.в.т.,ч. на базу придут 3 негодных изделия?

$$\begin{array}{l|l} n = 5000 & \\ p = 0,0002 & \\ m = 3 & \\ \hline P(3; 5000) - ? & \end{array} \left| \begin{array}{l} \lambda = n \cdot p = 5000 \cdot 0,0002 = 1 \\ P \approx \frac{\lambda^m}{m!} \cdot e^{-\lambda} = \frac{1^3}{3!} \cdot e^{-1} = \frac{1}{6e} \approx 0,06 \end{array} \right.$$

**Пример 2:** Коммутатор учреждения обслуживает 100 абонентов. Вероятность того, что в течение одной минуты абонент позвонит на коммутатор = 0,02. Какое из событий вероятнее: в течение одной минуты позвонит 3 абонента или 4 абонента?

$\lambda_1 = 0,02$	$\lambda = \lambda_1 \cdot S = 0,02 \cdot 100 = 2$ $P_1(3 ; 100) \approx 0,1805$ $P_2(4 ; 100) \approx 0,0902$ $P_1 > P_2$
$S = 100$	
$m_1 = 3$	
$m_2 = 4$	

## §20. Наивероятнейшее число появлений события $A$ в серии $n$ – независимых испытаний.

**Определение 1.** *Наивероятнейшим числом наступления события  $A$  в серии  $n$  – независимых испытаний называется такое число  $m = \mu$  наступлений этого события, которому соответствует наибольшая вероятность.*

## Формулы нахождения наивероятнейшего числа.

1. Если  $(n \cdot p)$  - целое число, то  $\mu = n \cdot p$
2. Если  $(n \cdot p)$  - дробное, то  $\mu$  находят из неравенств:

$$np - q \leq \mu \leq np + p$$

**Пример:** Вероятность всхожести семян 0,8. Найти наивероятнейшее число всходов, если посадили 38 зерен?

$n = 38$	$\left  \begin{array}{l} np = 0,8 \cdot 38 = 30,4 \\ 30,4 - 0,2 \leq \mu \leq 30,4 + 0,8 \\ 30,2 \leq \mu \leq 31,2 \\ \mu = 31 \end{array} \right.$
$p = 0,8$	
$q = 0,2$	
$\mu - ?$	

## §21. Интегральная теорема Лапласа.



Пусть проводится серия  **$n$**  – независимых испытаний на наступление события  **$A$** , в каждом из которых вероятность появления события  **$A$**  постоянна и равна  **$p$**  ( $0 < p < 1$ ).

**Теорема.** Вероятность того, что событие  **$A$**  в серии  **$n$**  – независимых испытаний появится не менее  $m_1$  - раза и не более  $m_2$  - раз приближенно равна:

$$P(m_1 \leq m \leq m_2; n) \approx \Phi(x_2) - \Phi(x_1),$$

$$\text{где } x_1 = \frac{m_1 - np}{\sqrt{n \cdot p \cdot q}} ; \quad x_2 = \frac{m_2 - np}{\sqrt{n \cdot p \cdot q}} ;$$



$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{x^2}{2}} dx$$

При решении такого вида задач пользуются специальными таблицами.

### Свойства функции $\Phi(x)$ :

1. Функция  $\Phi(x)$  нечетная, т.е.  
 $\Phi(-x) = -\Phi(x)$ ;

2. Наименьшее значение функция принимает в точке  $x=0$   $\Phi_{\min}(0) = 0$ ;

3. Наибольшее значение функция принимает при  $x=5$   $\Phi_{\max}(5) = 0,5$ ;

4. Для всех  $x > 5$  берут значение  $\Phi(x > 5) = 0,5$ .

**Пример:** Вероятность того, что вес зерен гороха 0,25г. = 0,3. К.в.т.,ч. среди взятых 200 штук, с этим весом будет от 50 до 70 штук.

$m_1 = 50$	$x_1 = \frac{m_1 - np}{\sqrt{npq}} = \frac{50 - 60}{\sqrt{42}} = \frac{-10}{\sqrt{42}} \approx -1,54$ $x_2 = \frac{m_2 - np}{\sqrt{npq}} = \frac{70 - 60}{\sqrt{42}} = \frac{10}{\sqrt{42}} \approx 1,54$ $P(50 \leq m \leq 70; 200) \approx \Phi(x_2) - \Phi(x_1) = \Phi(1,54) - \Phi(-1,54) =$ $= \Phi(1,54) + \Phi(1,54) = 2\Phi(1,54) = 2 \cdot 0,438 = 0,876$
$m_2 = 70$	
$n = 200$	
$p = 0,3$	
$q = 0,7$	

**Следствие.** Если вероятность  $p$  наступления события  **$A$**  в каждом испытании постоянна и отлична от 0 и 1, то при достаточно большом числе  **$n$**  — независимых испытаний вероятность того, что:

**а) Число  $m$  наступлений события  $A$  отличается от произведения  $(n \cdot p)$  не более, чем на величину  $\varepsilon > 0$  (по абсолютной величине), т.е.**

$$P_n(|m - np| \leq \varepsilon) \approx 2\Phi\left(\frac{\varepsilon}{\sqrt{npq}}\right)$$

б) Частость  $\frac{m}{n}$  события **A** заключена в пределах от  $\alpha$  до  $\beta$  (включительно), т.е.

$$P_n \left( \alpha \leq \frac{m}{n} \leq \beta \right) \approx \Phi(z_2) - \Phi(z_1), \text{ где}$$

$$z_1 = \frac{\alpha - p}{\sqrt{\frac{pq}{n}}} \quad ; \quad z_2 = \frac{\beta - p}{\sqrt{\frac{pq}{n}}}$$

в) Отклонение относительной частоты  $\frac{m}{n}$  от постоянной вероятности  $p$  по абсолютной величине не превышает заданного числа  $\varepsilon > 0$

$$P_n \left( \left| \frac{m}{n} - p \right| \leq \varepsilon \right) \approx 2\Phi \left( \varepsilon \cdot \sqrt{\frac{n}{pq}} \right)$$

**Пример 1:** В некоторой местности из каждых 100 семей 80 имеют морозильники. К.в.т.,ч. от 280 до 360 семей из 400 имеют морозильники.

Воспользуемся следствием **(a)**

$n = 400$ $m_1 = 280$ $m_2 = 360$ $p = 0,8$ $q = 0,2$	Границы интервала 280 и 360 симметричны относительно величины $np = 400 \cdot 0,8 = 320 \Rightarrow \epsilon = 40$ $P_{400}(280 \leq m \leq 360) = P_{400}(-40 \leq m - 320 \leq 40) \approx$ $\approx P_{400}( m - 320  \leq 40) \approx 2\Phi\left(\frac{40}{\sqrt{400 \cdot 0,8 \cdot 0,2}}\right) = 2\Phi\left(\frac{40}{8}\right) =$ $= 2\Phi(5) = 2 \cdot 0,5 = 1$
---	--

**Пример 2:** По статистическим данным в среднем 87% новорожденных доживают до 50 лет. К.в.т.,ч. из 1000 новорожденных доля (частость) доживших до 50 лет будет:

а) заключена в пределах от 0,9 до 0,95

б) будет отличаться от вероятности этого события не более, чем на 0,04 (по абсолютной величине).

Решение

a)

$$\begin{array}{l|l} p = 0,87 \\ q = 0,13 \\ n = 1000 \\ \alpha = 0,9 \\ \beta = 0,95 \\ \hline \end{array} \left| \begin{array}{l} P\left(0,9 \leq \frac{m}{n} \leq 0,95\right) \approx \Phi(z_2) - \Phi(z_1) \\ z_1 = \frac{\alpha - p}{\sqrt{\frac{pq}{n}}} = \frac{0,9 - 0,87}{\sqrt{\frac{0,87 \cdot 0,13}{1000}}} \approx 2,82 \\ z_2 = \frac{\beta - p}{\sqrt{\frac{pq}{n}}} = \frac{0,95 - 0,87}{\sqrt{\frac{0,87 \cdot 0,13}{1000}}} \approx 7,52 \\ P \approx \Phi(7,52) - \Phi(2,82) = 0,5 - 0,4976 = 0,0024 \end{array} \right.$$

б)

$$\begin{array}{l|l} p = 0,87 \\ q = 0,13 \\ n = 1000 \\ \varepsilon = 0,04 \\ \hline \end{array} \left| \begin{array}{l} P_n\left(\left|\frac{m}{n} - p\right| \leq \varepsilon\right) \approx 2\Phi\left(\varepsilon \cdot \sqrt{\frac{n}{pq}}\right) \\ P_{100}\left(\left|\frac{m}{n} - 0,87\right| \leq 0,04\right) \approx 2\Phi\left(0,04 \cdot \sqrt{\frac{1000}{0,87 \cdot 0,13}}\right) \approx \\ \approx 2\Phi(3,76) = 2 \cdot 0,49989 = 0,99978 \end{array} \right.$$

Так как неравенство  $\left|\frac{m}{n} - 0,87\right| \leq 0,04 \Leftrightarrow$   
неравенству  $0,83 \leq \frac{m}{n} \leq 0,91$ , то полученный  
результат означает, что практически

достоверно, что от 0,83 до 0,91 числа новорожденных из 1000 доживут до 50 лет.

## Часть III. Теория вероятностей.

### Глава 4. Дискретная случайная величина.

#### §22. Основные понятия.

**Определение 1.** Величина  $x$ , принимающая в зависимости от некоторых обстоятельств значения  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , имеющие определенные вероятности, называется **случайной величиной** и обозначается:  $x; y; z$ .

**Определение 2.** **Дискретной** - называется такая случайная величина, которая принимает отдельные изолированные значения.

**Пример 1:** Если  $x$  – число попаданий в цель (0, 1, 2, 3 ...).

**Пример 2:**  $x$  – количество зерен в колосе (0, 1, 2 ... 50).

**Пример 3:**  $x$  – количество студентов, которые учатся на «хорошо» и «отлично».

**Определение 3.** Совокупность значений случайной величины и соответствующих им вероятностей называется **законом распределения случайной величины**.

$x$	$x_1$	$x_2$	$\dots$	$x_n$
$p$	$p_1$	$p_2$	$\dots$	$p_n$

$$\sum_{i=1}^n p_i = 1$$

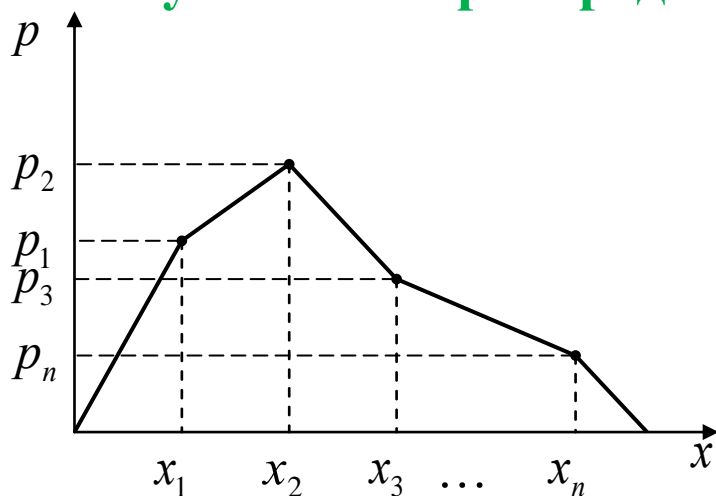
**Пример:** Пусть  $x$  - число выпавших очков на игральной кости:

$x$	<b>1</b>	<b>2</b>	<b>3</b>	<b>4</b>	<b>5</b>	<b>6</b>
$p$	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6

$$\sum_{i=1}^6 p_i = \frac{1}{6} \cdot 6 = 1$$

Для наглядности закона распределения дискретной случайной величины его можно

изобразить графиком в виде **полигона** или многоугольника распределения вероятностей.



Полученная ломаная линия  $(x_i; p_i)$  соединяет на плоскости точки с координатами. Причем,  $(x_1; p_1)$  соединяют с  $(0; 0)$ , а  $(x_n; p_n)$  - с  $(x_{n+1}; 0)$ .

## §23. Действия над дискретными случайными величинами.

**Определение 1.** Дискретные случайные величины  $x$  и  $y$  называются **независимыми** между собой, если вероятность любого значения каждой из них не зависит от полученных значений всех остальных.



$y_i$	$y_1$	$y_2$	$y_3$	$\dots$	$y_m$
$q_i$	$q_1$	$q_2$	$q_3$	$\dots$	$q_m$

$x_i$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$\dots$	$x_n$
$p_i$	$p_1$	$p_2$	$p_3$	$\dots$	$p_n$

**Определение 2.** Алгебраической суммой дискретных случайных независимых величин  $x$  и  $y$  называется новая случайная величина  $z = x \pm y$ , которая принимает значения вида:  $x_i \pm y_i$ , где

$$i = 1, 2, 3 \dots n$$

$$j = 1, 2, 3 \dots m \text{ с вероятностями } p_i \cdot q_i.$$

**Определение 3.** Произведением двух дискретных случайных величин  $x$  и  $y$  называется новая случайная величина

$z = x \cdot y$ , принимающая значения вида  $x_i \cdot y_i$   
с соответствующими вероятностями  $p_i \cdot q_i$ .

**Определение 4.** **Квадратом** случайной величины  **$x$**  называется новая случайная величина  $x^2$ , имеющая закон распределения:

$x_i^2$	$x_1^2$	$x_2^2$	$x_3^2$	$\dots$	$x_n^2$
$p_i$	$p_1$	$p_2$	$p_3$	$\dots$	$p_n$

**Определение 5.** Случайную величину  **$x$**  можно умножать на любое действительное число  $k \neq 0$ , вероятности при этом остаются без изменения.

$z_i = k \cdot x_i$	$k \cdot x_1$	$k \cdot x_2$	$k \cdot x_3$	$\dots$	$k \cdot x_n$
$p_i$	$p_1$	$p_2$	$p_3$	$\dots$	$p_n$

Для сравнения случайных величин между собой, служат их числовые характеристики:

$\overline{M}(x)$  - среднее арифметическое взвешенное;

$M(x)$  - математическое ожидание;

$D(x)$  - дисперсия;

$\sigma(x)$  - среднее квадратическое отклонение.

## §24. Среднее арифметическое взвешенное.

Пусть произведено  $N$  испытаний, в которых случайные величины появлялись соответственно  $M$  раз.

$x_i$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$\dots$	$x_n$
$M_i$	$M_1$	$M_2$	$M_3$	$\dots$	$M_n$

$$\sum_{i=1}^n M_i = N$$

**Определение 1.** **Средним арифметическим**  
**взвешенным**  $\overline{M}(x)$  **называется** **сумма**  
**произведений значений случайной величины**  
**на их относительные частоты.**

$$\overline{M}(x) = \frac{x_1 M_1 + x_2 M_2 + x_3 M_3 + \dots + x_n M_n}{N} =$$

$$= \frac{x_1 M_1}{N} + \frac{x_2 M_2}{N} + \frac{x_3 M_3}{N} + \dots + \frac{x_n M_n}{N} =$$

$$= x_1 W_1 + x_2 W_2 + x_3 W_3 + \dots + x_n W_n$$

$$\boxed{\overline{M}(x) = \sum_{i=1}^n x_i W_i}$$

$\overline{M}(x)$  - **вычисляется всегда после опыта и**  
**измеряется в тех же единицах, что и**  
**сама случайная величина.**

## §25. Математическое ожидание.

**Если  $N$  будет стремиться к  $\infty$ , то  $W_i \rightarrow P_i$ .**

**Определение 1.** **Математическое ожидание**  
**дискретной случайной величины есть сумма**

произведений значений случайной величины на соответствующие вероятности.

$$M(x) = x_1 p_1 + x_2 p_2 + \dots + x_n p_n$$

$$M(x) = \sum_{i=1}^n x_i p_i$$

Для каждой случайной величины ее математическое ожидание  $M(x)$  есть величина постоянная:  $M(x) = \text{const}$  для некоторой  $x$ .

**Пример:** В результате испытаний двух приборов установлена вероятность наблюдения помех, оцениваемых по трехбалльной системе:

### 1 прибор

уровень помех $X$	1	2	3
$P_i$	0,6	0,3	0,1

### 2 прибор

уровень помех $Y$	1	2	3
$P_i$	0,7	0,2	0,1

**Какой прибор лучше?**

*Решение:*

$$M(X) = 1 \cdot 0,6 + 2 \cdot 0,3 + 3 \cdot 0,1 = 1,5$$

$$M(Y) = 1 \cdot 0,7 + 2 \cdot 0,2 + 3 \cdot 0,1 = 1,4$$

$$M(X) > M(Y)$$

*Второй прибор лучше!*

Свойства  $M(x)$ :

1. Математическое ожидание постоянной величины равно самой постоянной величине.

$x$	$c$
$p$	$1$

$$\underline{M(c) = c}$$

2. Постоянный множитель выносят за знак математического ожидания.

$$\underline{M(cx) = cM(x)}$$

3. Математическое ожидание произведения двух независимых случайных величин равно произведению их математических ожиданий.

$$\underline{M(x \cdot y) = M(x) \cdot M(y)}$$

4. Математическое ожидание алгебраической суммы двух независимых случайных величин равно алгебраической сумме их математических ожиданий.

$$\underline{M(x \pm y) = M(x) \pm M(y)}$$

5. Математическое ожидание числа появлений события  $A$  в « $n$ » независимых испытаниях равно произведению числа испытаний на вероятность появления события в каждом испытании.

$$\underline{M(x_{=n}) = n \cdot p}$$

6. Математическое ожидание отклонения случайной величины от ее математического ожидания равно  $0$ .

$$\underline{M(x - M(x)) = 0}$$

7. Математическое ожидание квадрата отклонения случайной величины от ее математического ожидания равно разности между математическим ожиданием квадрата случайной величины и квадратом ее математического ожидания.

$$\underline{M(x - M(x))^2 = M(x^2) - M^2(x)}$$

## §26 Дисперсия.

$M(x)$  можно рассматривать как центр, относительно которого происходит рассеивание этой случайной величины, однако, случайные величины могут иметь равные математические ожидания, а сами вести себя будут по-разному. Для сравнения случайных величин служит дисперсия.

**Определение 1.** *Дисперсией* случайной величины  $x$  называют математическое ожидание квадрата отклонения случайной величины от своего математического ожидания.

$$D(x) = M(x - M(x))^2 \quad \text{или}$$

$$D(x) = (x_1 - M(x))^2 \cdot p_1 + (x_2 - M(x))^2 \cdot p_2 + \dots + (x_n - M(x))^2 \cdot p_n$$

**На практике пользуются формулой:**

$$D(x) = M(x^2) - M^2(x)$$



Дисперсия всегда есть величина положительная, т.е.  $D(x) > 0$ .

Чем больше дисперсия, тем больше рассеивание случайной величины относительно  $M(x)$ , поэтому при сравнении двух случайных величин, та величина считается более устойчивой, у которой меньше дисперсия.

**Пример:** Имеются 2 сорта пшеницы:

1 сорт

Пшеница $X$	18	20	22
$P_i$	0,1	0,7	0,2

2 сорт

Пшеница $Y$	18	20	22
$P_i$	0,2	0,5	0,3

Какой сорт лучше?

*Решение:*

$$M(X) = 18 \cdot 0,1 + 20 \cdot 0,7 + 22 \cdot 0,2 = 20,2$$

$$M(Y) = 18 \cdot 0,2 + 20 \cdot 0,5 + 22 \cdot 0,3 = 20,2$$

$$M(X) > M(Y)$$

$$D(X) = (18^2 \cdot 0,1 + 20^2 \cdot 0,7 + 22^2 \cdot 0,3) - (20,2)^2 = 1,8$$

$$D(Y) = (18^2 \cdot 0,2 + 20^2 \cdot 0,5 + 22^2 \cdot 0,3) - (20,2)^2 = 1,6$$

$$D(X) > D(Y)$$

**2 сорт лучше!**

$M(x)$  - единицы измерения те же, что у случайной величины.

$D(x)$  - единицы квадратные.

Свойства  $D(x)$  :

1. Дисперсия постоянной величины равна 0.

$$\underline{D(c) = 0}$$

$$D(c) = M(c - M(c))^2 = M(c - c)^2 = M(0) = 0$$

2. Постоянный множитель можно выносить за знак дисперсии, но в квадрате.

$$\underline{D(cx) = c^2 D(x)}$$

3. Дисперсия алгебраической суммы случайных величин равна сумме дисперсий этих величин.

$$\underline{D(x \pm y) = D(x) + D(y)}$$

4.  $\underline{D(c + x) = D(x)}$

5. Дисперсия числа появлений события  $A$  в « $n$ » независимых испытаниях равна  $nprq$

$$D(x_{=m}) = npq$$

## §27. Среднее квадратическое отклонение.

**Определение 1.** Средним квадратическим отклонением случайной величины называется квадратный корень из дисперсии.

$$\sigma(x) = \sqrt{D(x)}$$

$\sigma(x)$  - характеристика рассеивания, но имеющая ту же размерность, что и сама случайная величина.

Свойства  $\sigma(x)$ :

1. В серии « $n$ » независимых испытаний, если  $x = m$ , то:

$$\sigma(x_{=m}) = \sqrt{npq}$$

2.

$$\sigma(x_1 + x_2 + \dots + x_n) = \sqrt{\sigma^2(x_1) + \sigma^2(x_2) + \dots + \sigma^2(x_n)}$$

3. 
$$\frac{\sigma(x)}{M(x)} \cdot 100\% = V(x) \quad - \quad \text{коэффициент}$$

вариации. Чем меньше  $V(x)$ , тем более устойчива случайная величина.

**Замечание.** Обратим внимание на интерпретацию математического ожидания и дисперсии в финансовом анализе.

Пусть, например, известно распределение доходности  $X$  некоторого актива (например, акции), т.е. известны значения доходности  $x_i$

и соответствующие им вероятности  $P_i$  за рассматриваемый промежуток времени.

Тогда, очевидно, математическое ожидание  $M(x)$  выражает среднюю (прогнозную)

доходность актива, а дисперсия  $D(x)$  или среднее квадратическое отклонение  $\sigma(x)$  - меру отклонения, колебленности доходности от ожидаемого среднего значения, т.е. риск данного актива.

## Часть III. Теория вероятностей.

# Глава 5. Непрерывная случайная величина.

## §28. Способы задания непрерывной случайной величины.

**Определение 1.** Случайная величина называется *непрерывной*, если она принимает все значения некоторого интервала (конечного или бесконечного).

*Например:* длина стебля; рост человека; длина ступни.

Непрерывная случайная величина может быть задана следующими способами:

- а) Табличный
- б) Графический
- в) Аналитический

### 28.1 Табличный способ

Непрерывная случайная величина задается таблично в виде закона распределения, который представляет из себя таблицу, в первой строке которой перечислены интервальные изменения случайной величины, а во второй строке соответствующие вероятности или частоты.

$x$	$x_0 - x_1$	$x_1 - x_2$	$x_2 - x_3$	$\dots$	$x_{n-1} - x_n$
$p$	$p_1$	$p_2$	$p_3$	$\dots$	$p_n$

$$\sum_{i=1}^n p_i = 1$$

**Пример:** Дается распределение длины колоса пшеницы, где  $x$  - длина колоса,  $N = 100$   
Составить таблицу распределения по частотам.

$x$	7-8	8-9	9-10	10-11	11-12	12-13	13-14
$M_i$	8	20	28	24	10	8	2

**По частотам:**

$x$	7-8	8-9	9-10	10-11	11-12	12-13	13-14
$p_i$	0,08	0,2	0,28	0,24	0,10	0,08	0,02

От непрерывной случайной величины можно перейти к дискретной, заменив интервал изменения непрерывной случайной величины серединой каждого интервала.

$x$	7,5	8,5	9,5	10,5	11,5	12,5	13,5
$p_i$	0,08	0,2	0,28	0,24	0,10	0,08	0,02

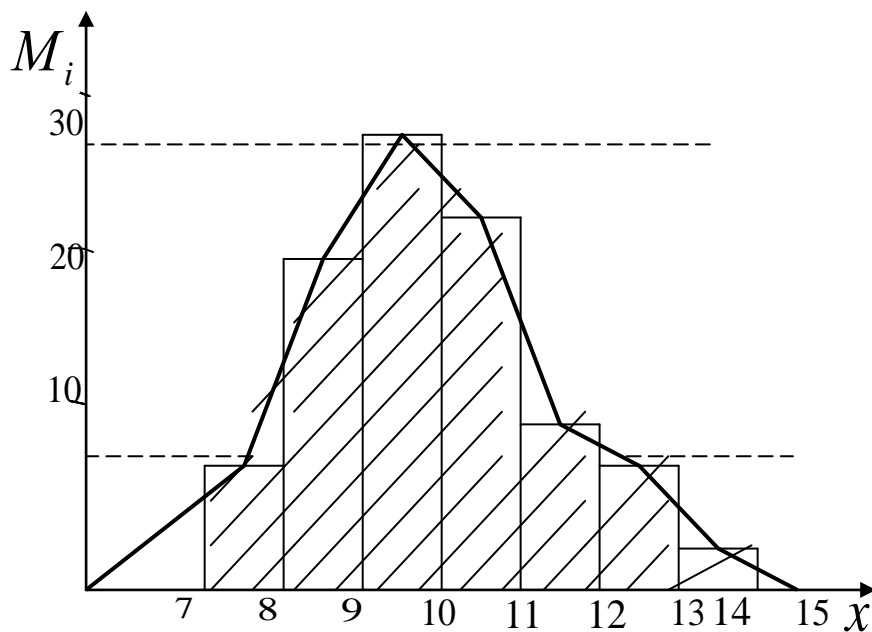
**Замечание.** Если распределение случайной величины дано по частотам или частостям, то такое распределение называется вариационным рядом. Значения величины  $x$  называют вариантами, частоты - весами, а общее число рассматриваемых объектов - объемом совокупности.

## 28.2 Графическое задание.

Непрерывную случайную величину можно изобразить графически - гистограммой.

**Определение 2.** *Гистограммой* распределения вероятностей (частостей или частот) называется ступенчатая фигура, составленная из прямоугольников, основаниями которых служат интервалы изменения случайной величины, а высотами вероятности, частоты или частости.





Для непрерывной случайной величины можно построить и **полигон**, взяв середины интервалов.

### 28.3 Аналитическое задание непрерывной случайной величины.

Непрерывную случайную величину можно задать еще с помощью функции

$F(x)$  - функции распределения вероятностей случайной величины.

**Определение 1.** **Функцией распределения** (интегральной функцией распределения) называется вероятность того, что случайная величина  **$X$**  примет значения в результате испытания меньше, чем  **$x$**

$$X < x, \text{ т.е. } \boxed{F(x) = P(X < x)}$$

### Свойства функции $F(x)$

**Т.к.**  $F(x) = P(X < x)$ , **то**

1.  $F(x)$  **неотрицательная**:  $0 \leq F(x) \leq 1$

2.  $F(x)$  - **неубывающая**, **т.к.** для  $x_1 \leq x_2$   $F(x_1) \leq F(x_2)$

3. **Если все возможные значения случайной величины находятся в промежутке**  
 $x \leq a$   $F(x) = 0$   
 $[a; b]$ , **то при**  $x \geq b$   $F(x) = 1$

4. **Вероятность того, что случайная величина примет значение, заключенное в интервале  $(\alpha; \beta)$  будет равна:**

$$P(\alpha \leq x \leq \beta) = F(\beta) - F(\alpha)$$

5.  $F(x)$  - **универсальная характеристика случайной величины, так как она существует и для непрерывной, и для дискретной случайной величины.**

**Для непрерывной случайной величины. — график  $F(x)$  непрерывная линия.**

**Для дискретной случайной величины — график  $F(x)$  имеет ступенчатый вид.**

**Свойства функции  $F(x)$  дают представления о графике этой функции:**

**1. График расположен в полосе, ограниченной прямыми  $y=0$  и  $y=1$  (1-е свойство)**

**2. при  $x \leq a$  ординаты графика = 0  
при  $x \geq b$  ординаты графика = 1**

**Построим функцию распределения случайной величины  $X$ , закон распределения которой представлен таблицей:**

$x$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$\dots$	$x_i$	$\dots$	$x_n$
$p$	$p_1$	$p_2$	$p_3$	$\dots$	$p_i$	$\dots$	$p_n$

**при  $x \leq x_1$   $F(x) = P(X < x_1) = 0$**

**при  $x_1 < x \leq x_2$   $F(x) = P(X < x_2) = P(X = x_1) = p_1$**

**при  $x_2 < x \leq x_3$   $F(x) = P(X < x_3) = P(X = x_1) + P(X = x_2) = p_1 + p_2$**

**при  $x_3 < x \leq x_4$   $F(x) = P(X < x_4) = P(X = x_1) + P(X = x_2) + P(X = x_3) = p_1 + p_2 + p_3$**

**при  $x_{n-1} < x \leq x_n$**

$F(x) = P(X < x_n) = P(X = x_1) + P(X = x_2) + P(X = x_3) + \dots + P(X = x_{n-1}) = p_1 + p_2 + p_3 + \dots + p_{n-1}$

**при  $x > x_n$**

Для дискретной случайной величины график функции распределения представляет собой разрывную ступенчатую линию. Когда переменная  $x$  проходит через какое-нибудь из возможных значений случайной величины, значение функции распределения меняется скачкообразно, т.е. функция имеет скачок в тех точках, в которых случайная величина принимает конкретное значение согласно закону распределения, причем величина скачка равна вероятности этого значения. Сумма величин всех скачков функции распределения **равна 1**. В интервалах между значениями случайной величины функция  $F(x)$  **постоянна**.

**Пример 1:** Дана дискретная случайная величина  $x$ , заданная законом распределения. Найти функцию распределения и построить ее график.

$x$	1	4	8
$p$	0,3	0,1	0,6

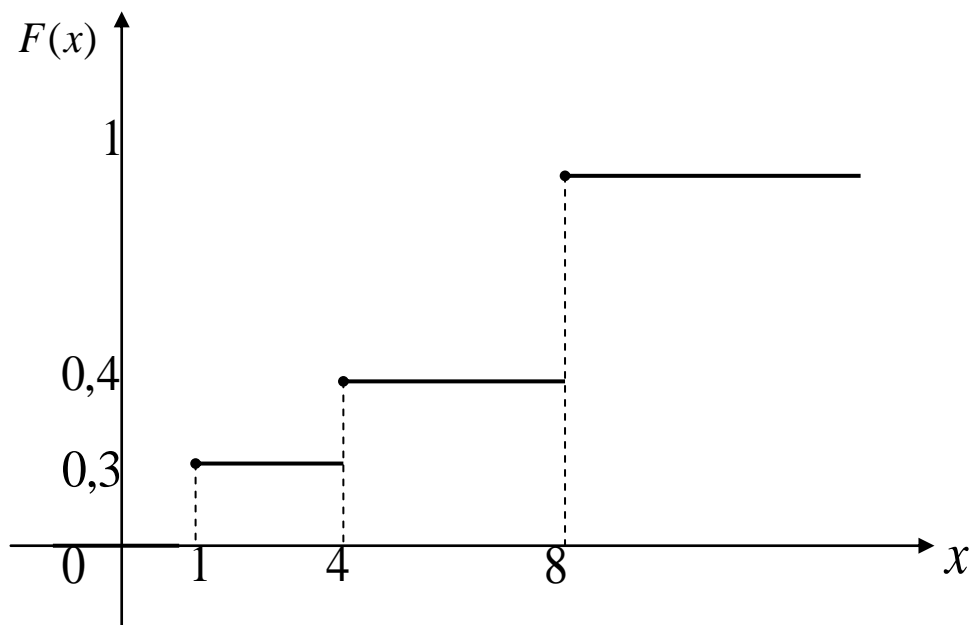
**при**  $x \leq 1$   $F(x) = 0$

**при**  $1 < x \leq 4$   $F(x) = p_1 = 0,3$

**при**  $4 < x \leq 8$   $F(x) = p_1 + p_2 = 0,3 + 0,1 = 0,4$

**при**  $x > 8$   $F(x) = 1$

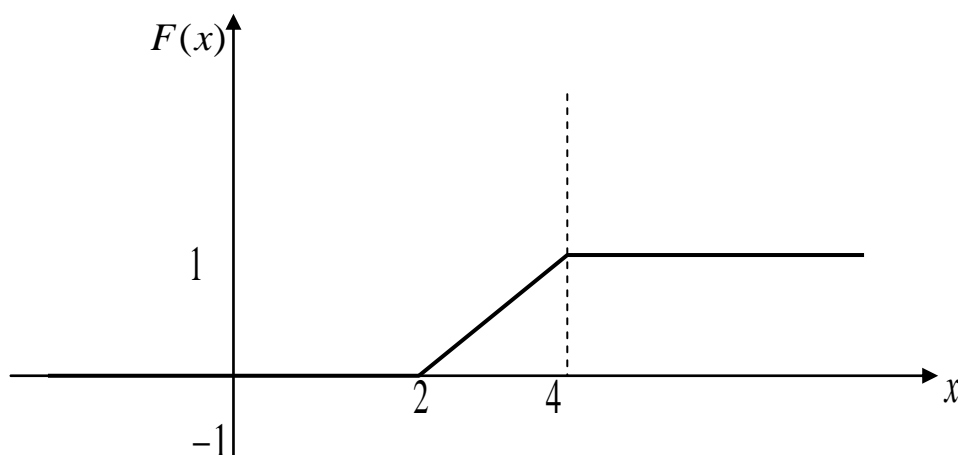
$$F(x) = \begin{cases} 0; & x \leq 1 \\ 0,3; & 1 < x \leq 4 \\ 0,4; & 4 < x \leq 8 \\ 1; & x > 8 \end{cases}$$



**Пример 2:** Построить график функции распределения и найти вероятность того, что случайная величина примет значение из интервала  $[2;3]$

$$F(x) = \begin{cases} 0; & x \leq 2 \\ \frac{1}{2}x - 1; & 2 < x \leq 4 \\ 1; & x > 4 \end{cases}$$

$$\begin{array}{c|c|c} x & 0 & 2 \\ \hline y & -1 & 0 \end{array} \quad y = \frac{1}{2}x - 1$$



**при**  $2 \leq x \leq 3$   $F(x) = \frac{1}{2}x - 1$

$$P(2 \leq x \leq 3) = F(3) - F(2) =$$

$$= \left( \frac{1}{2} \cdot 3 - 1 \right) - 0 = \frac{3}{2} - 1 - 0 = \frac{1}{2}$$

## §29. Плотность распределения вероятностей.

**Определение 1.** Дифференциальной функцией распределения или *плотностью распределения вероятностей* называется первая производная интегральной функции распределения  $F(x)$ .

$$\boxed{f(x) = F'(x)} \Rightarrow F(x) - \text{первообразная для } f(x)$$

Плотность распределения вероятностей  $f(x)$ , как и функция распределения  $F(x)$ , является одной из форм закона распределения, но в отличие от функции распределения она существует только для непрерывных случайных величин, поскольку для существования  $f(x)$  требуется непрерывность и дифференцируемость функции  $F(x)$ , а для дискретной случайной величины эти требования не выполняются.

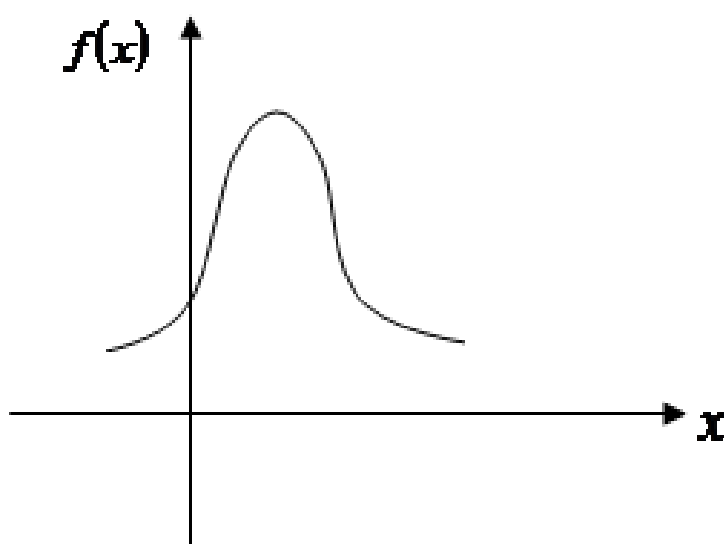


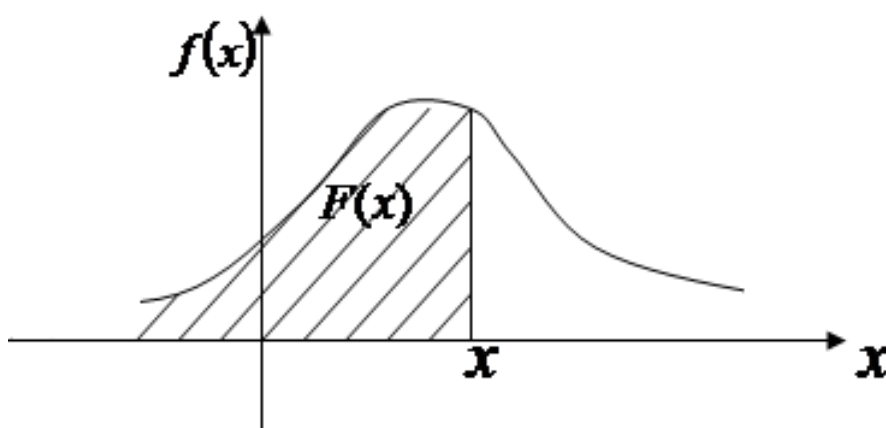
График плотности распределения  $f(x)$  называется кривой распределения.

## Свойства плотности распределения вероятностей.

1. Для любых  $X$  дифференциальная функция распределения  $f(x)$  неотрицательна, т.е.  $f(x) \geq 0$

2. Для интегральной и дифференциальной функции распределения имеет место равенство:

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(x) dx$$

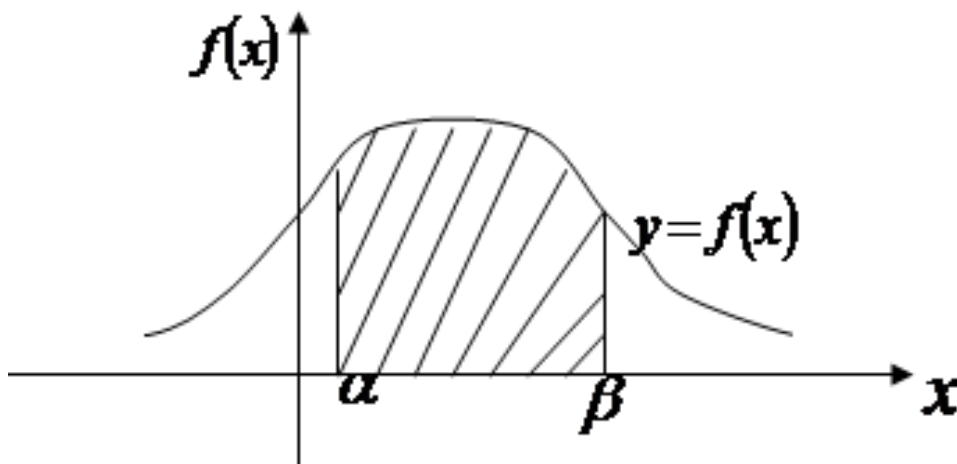


3. Вероятность того, что случайная величина  $X$  примет значение из интервала  $[\alpha; \beta]$  равна определенному интегралу от ее плотности вероятности в пределах от  $\alpha$  до  $\beta$



$$P(\alpha \leq X \leq \beta) = \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx$$

С геометрической точки зрения, вероятность попадания случайной величины в интервал  $(\alpha; \beta)$  численно выражается площадью криволинейной трапеции, ограниченной сверху кривой  $f(x)$ , снизу - осью  $OX$   $[\alpha; \beta]$ , слева и справа прямыми  $x = \alpha$  и  $x = \beta$



4. Несобственный интеграл в бесконечных пределах от плотности распределения вероятностей **равен 1.**

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1$$

**5. Если случайная величина принимает значения в замкнутом интервале**

$[a; b]$ , т.е.  $f(x) = \begin{cases} f(x), & \text{если } a \leq x \leq b; \\ 0, & \text{если } x < a \text{ и } x > b \end{cases}$ , то  
определенный интеграл плотности  
распределения **= 1.**

$$\int_a^b f(x) dx = 1$$

**Пример:** Задана плотность распределения непрерывной случайной **величины X**. Найти функцию распределения и построить графики  $F(x)$  и  $f(x)$ .

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x \leq 0 \\ \cos x, & \text{при } 0 < x \leq \frac{\pi}{2} \\ 0, & \text{при } x > \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

По формуле  $\int_{-\infty}^x f(x) dx$  имеем:

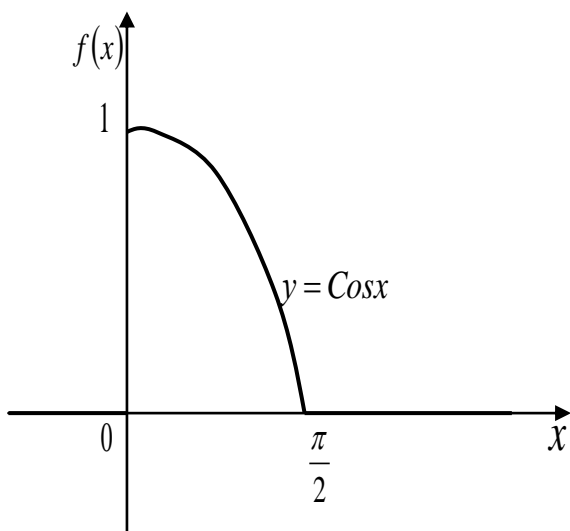
**при**  $x \leq 0$   $f(x) = 0 \Rightarrow F(x) = \int_{-\infty}^0 0 dx = 0$

**при**  $0 < x \leq \frac{\pi}{2} \Rightarrow F(x) = \int_{-\infty}^0 0 dx + \int_0^x \cos x dx = \sin x$

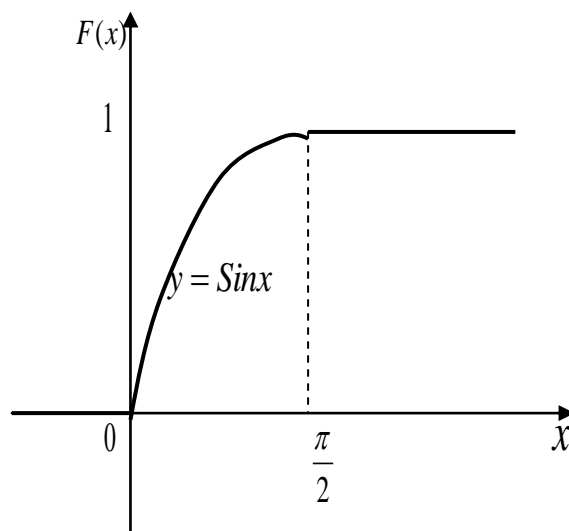
**при**  $x > \frac{\pi}{2}$

$\Rightarrow F(x) = \int_{-\infty}^0 0 dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^x 0 dx = \sin \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 1$

$\Rightarrow F(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x \leq 0 \\ \sin x, & \text{при } 0 < x \leq \frac{\pi}{2} \\ 1, & \text{при } x > \frac{\pi}{2} \end{cases}$



$f(x)$



$F(x)$

## §30. Числовые характеристики непрерывной случайной величины.

Рассмотрим непрерывную случайную величину  $X$ , возможные значения которой находятся в интервале  $[a; b]$ , с плотностью вероятности  $f(x)$ .

1. Математическим ожиданием непрерывной случайной величины  $X$ , возможные значения которой  $\in [a; b]$ , называется определенный интеграл

$$M(x) = \int_a^b x \cdot f(x) dx$$

Если возможные значения случайной величины распределены по всей оси  $OX$ , то

$$M(x) = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x) dx$$

- предполагается, то

несобственный интеграл сходится абсолютно.

По аналогии с дисперсией дискретной случайной величины определяется дисперсия непрерывной случайной величины.

2. *Дисперсией* непрерывной случайной величины с плотностью вероятности  $f(x)$  называется определенный интеграл математического ожидания квадрата ее отклонения.

$$D(x) = \int_a^b (x - M(x))^2 f(x) dx \text{ или}$$

$$D(x) = \int_a^b x^2 f(x) dx - M^2(x)$$

Если возможные значения принадлежат всей оси *ОХ*, то

$$D(x) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x) dx - M^2(x)$$

3. *Среднее квадратическое отклонение* непрерывной случайной величины равно корню квадратному из ее дисперсии.

$$\sigma(x) = \sqrt{D(x)}$$

**Замечание:** Свойства  $M(x)$  и  $D(x)$  формулируются так же, как и соответствующие свойства для дискретной величины.

**Пример:** Дана функция распределения вероятностей.

$$F(x) = \begin{cases} 0; & x \leq 0 \\ x; & 0 < x \leq 1 \\ 1; & x > 1 \end{cases}$$

$$M(x) - ?$$

$$\text{Найти: } D(x) - ?$$

$$\sigma(x) - ?$$

$$f(x) = F'(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ 1, & 0 < x \leq 1 \\ 0, & x > 1 \end{cases} \quad [a; b] = [0; 1]$$

$$M(x) = \int_a^b x \cdot f(x) dx = \int_0^1 x \cdot 1 \cdot dx = \frac{x^2}{2} \Big|_0^1 = \frac{1}{2}$$

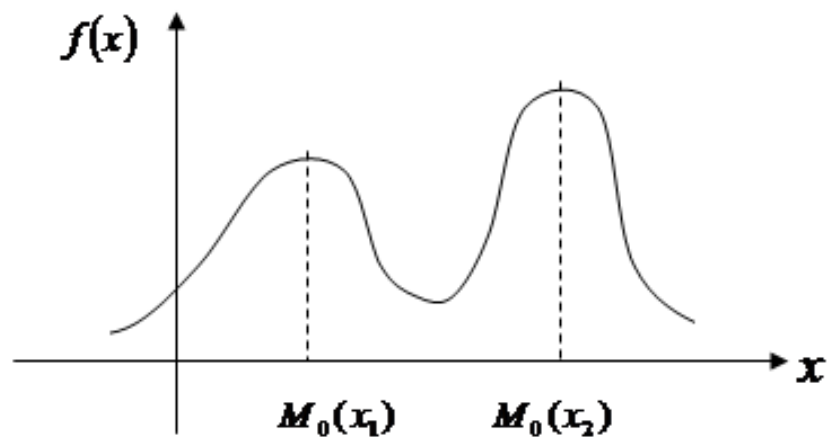
$$D(x) = \int_a^b x^2 f(x) dx - M^2(x) =$$

$$\int_0^1 x^2 \cdot 1 \cdot dx - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{x^3}{3} \Big|_0^1 - \frac{1}{4} = \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{1}{12}$$

$$\sigma(x) = \sqrt{D(x)} = \sqrt{\frac{1}{12}} = \frac{1}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{6}$$

### §31. Числовые характеристики случайных величин, отражающих особенности распределения.

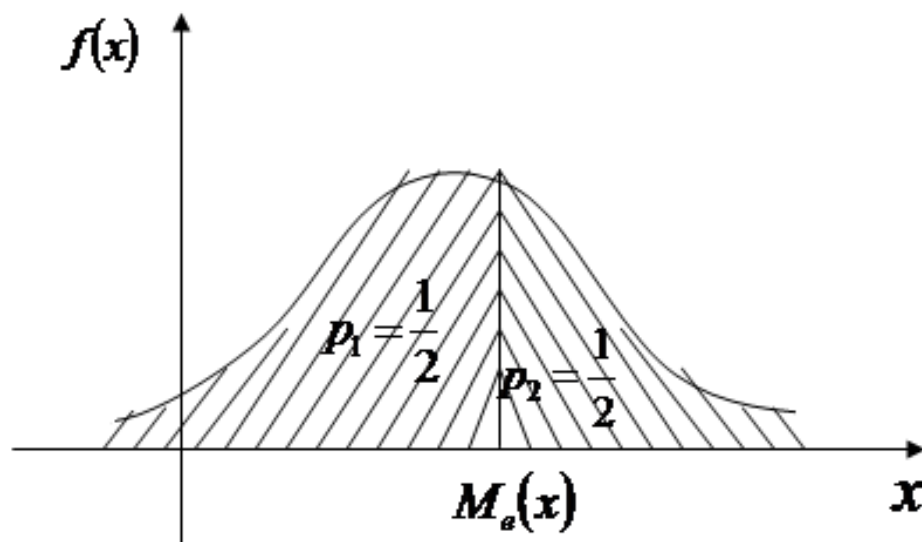
**Определение 1.** *Модой*  $M_0(x)$  **случайной величины**  $X$  **называется ее наиболее вероятное значение (для которого вероятность**  $P_i$  **или плотность вероятности**  $f(x)$  **достигает максимума).**



Если вероятность или плотность вероятности достигает *max* не в одной, а в нескольких точках, то распределение называют **полимодальным**.

**Определение 2. Медианой**  $M_e(x)$  непрерывной случайной величины  $X$  называется такое ее значение, которое определяется равенством:

$$P(X < M_e(x)) = P(X > M_e(x)) = \frac{1}{2} \quad (1)$$





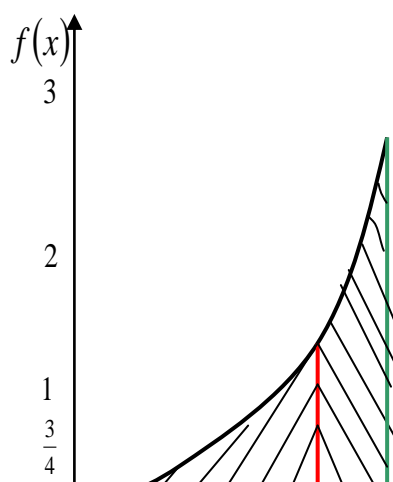
То есть вероятность того, что случайная величина  $X$  примет значение меньше медианы  $M_e(x)$  или больше ее, одна и та же и  $= \frac{1}{2}$ .

**Геометрически:** вертикальная прямая  $x = M_e(x)$ , проходящая через точку с абсциссой  $= M_e(x)$ , делит площадь фигуры под кривой распределения на две равные части.

**Пример:** Найти моду, медиану и  $M(x)$  случайной величины  $X$  с плотностью вероятности  $f(x) = 3x^2$  при  $x \in [0; 1]$

Построим кривую распределения  $f(x) = 3x^2$

$x$	0	1	$\frac{1}{2}$
$f(x)$	0	3	$\frac{3}{4}$



$$f_{\max}(x) = 3 \quad \text{при } x = M_0(x) = 1$$

$$M_e(x) = b \text{ найдем из условия (1)}$$

$$P(M_0(x) \leq X \leq M_e(x)) = \frac{1}{2}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = \frac{1}{2}$$

$$\int_{-\infty}^b f(x) dx = \int_{-\infty}^0 0 dx + \int_0^b 3x^2 dx = x^3 \Big|_b^0 = b^3$$

$$\Rightarrow b^3 = \frac{1}{2}$$

$$M_e(x) = \sqrt[3]{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt[3]{2}} \approx 0,79$$

$$M(x) = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x) dx =$$

$$\int_{-\infty}^0 0 dx + \int_0^1 x(3x^2) dx + \int_1^{\infty} 0 dx = \frac{3}{4} x^4 \Big|_0^1 = \frac{3}{4}$$

**Определение 3.** Начальным моментом  $k$ -го порядка случайной величины  $X$  называется математическое ожидание  $k$ -й степени этой величины.

$$\nu_k = M(X^k)$$

Для дискретной случайной величины

$$\nu_k = \sum_{i=1}^n x_i^k \cdot p_i$$

Для непрерывной случайной

величины

$$\nu_k = \int_{-\infty}^{\infty} x^k \cdot f(x) dx$$

**Определение 4.** Центральным моментом  $k$ -го порядка случайной величины  $X$  называется математическое ожидание  $k$ -й степени отклонения случайной величины  $X$  от ее математического ожидания.

$$\mu_k = M \left( X - M(x) \right)^k$$

Для дискретной случайной величины:

$$\mu_k = M \left( x^k \right) - M^k(x) = \sum_{i=1}^n x_i^k \cdot p_i - M^k(x)$$

Для непрерывной случайной величины:

$$\mu_k = \int_{-\infty}^{\infty} \left( x_i - M(x) \right)^k f(x) dx =$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^k \cdot f(x) dx - M^k(x)$$

Нетрудно заметить, что при  $k = 1$  первый начальный момент случайной величины  $X$  есть ее математическое ожидание, т.е.

$\nu_1 = M(x)$ , при  $k = 2$  - второй центральный момент — дисперсия, т.е.  $\mu_2 = D(x)$ .

Центральные моменты могут быть выражены

через начальные моменты  $\nu_k$  по формулам:

$$\mu_1 = 0$$

$$\mu_2 = v_2 - v_1^2$$

$$\mu_3 = v_3 - 3v_1 \cdot v_2 + 2v_1^3$$

$$\mu_4 = v_4 - 4v_1 \cdot v_3 + 6v_1^2 \cdot v_2 - 3v_1^4 \quad \text{и т.д.}$$

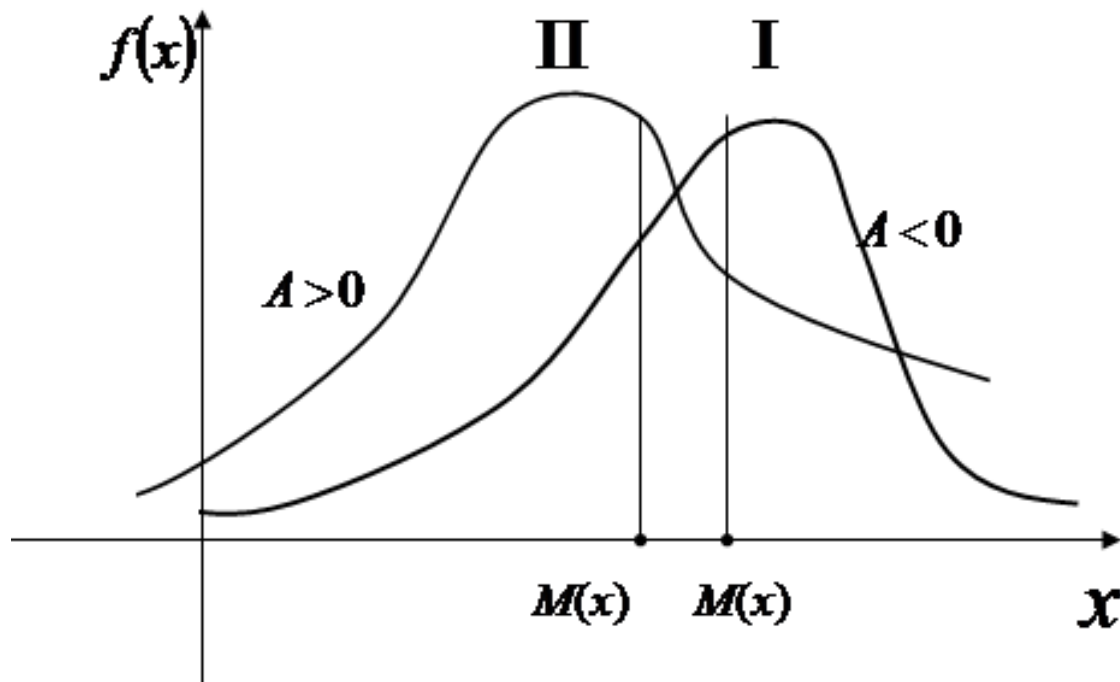
**Итак,** первый начальный момент характеризует среднее значение или положение распределения случайной величины  $X$  или ее  $M(x)$ .

Второй центральный момент - степень рассеивания распределения  $X$  относительно  $M(x)$  - или  $D(x)$ .

Третий центральный момент  $\mu_3$  служит для характеристики **асимметрии** (скошенности) распределения. Он имеет размерность куба случайной величины. Поэтому, чтобы получить безразмерную величину, ее делят на  $\sigma^3(x)$ .

**Определение 5.** Коэффициентом асимметрии  $A$  называется величина, равная

отношению третьего центрального момента к кубу среднего квадратического отклонения.



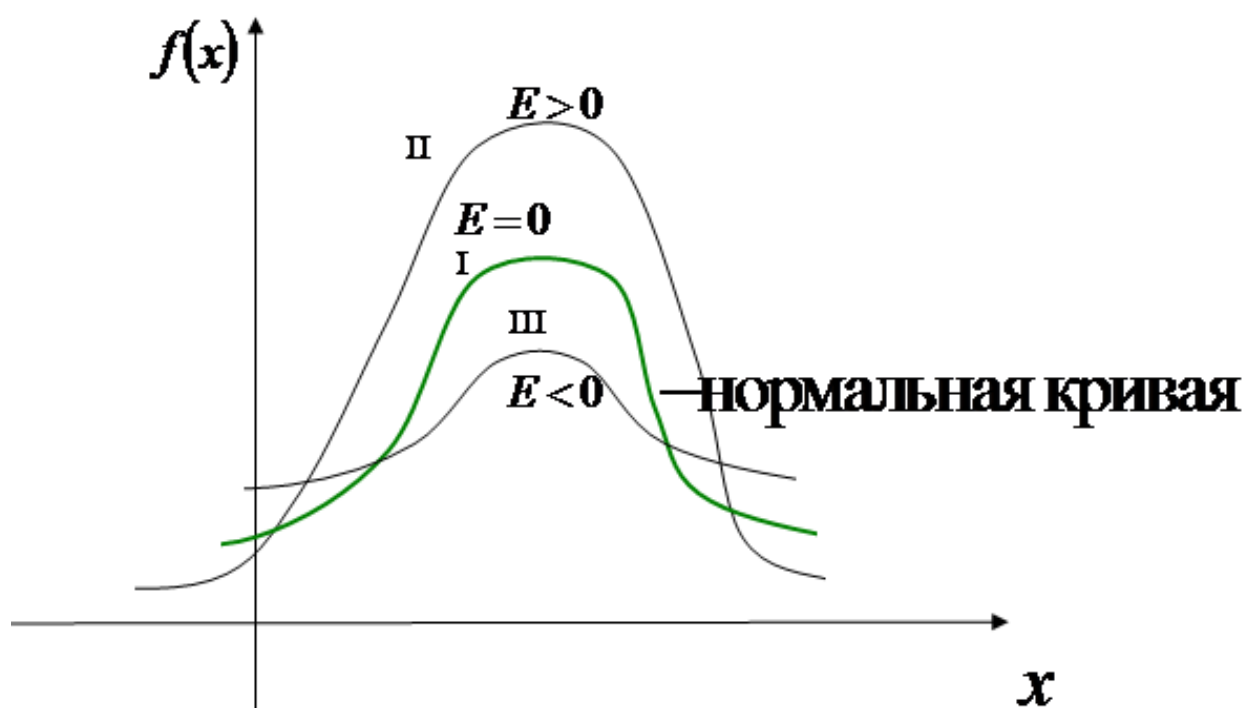
**I. Если коэффициент асимметрии отрицательный, то это говорит о большом влиянии на величину  $\mu_3$  отрицательных отклонений. В этом случае кривая распределения более пологая слева от  $M(x)$  (левосторонняя асимметрия)  $A < 0$ .**

II. Если коэффициент  $A > 0$ , а значит, преобладает влияние положительных отклонений, то кривая распределения более пологой справа от  $M(x)$  (правосторонняя асимметрия)  $A > 0$ .

Четвертый центральный момент  $\mu_4$  служит для характеристики крутости (островершинности или плосковершинности) распределения.

*Определение 1.* Эксцессом случайной величины называется число:

$$E = \frac{\mu_4}{\sigma^4(x)} - 3$$



**I.** Для наиболее распространенного в природе нормального закона распределения (который будет рассматриваться далее) отношение

$\frac{\mu_4}{\sigma^4(x)} = 3$ . Поэтому эксцесс служит для сравнения данного распределения с нормальным, у которого  $E = 0$ .

**II.** Если для данного распределения  $E > 0$ , то соответствующая кривая распределения более островершинная по сравнению с кривой нормального распределения.



**III.** Если  $E < 0$ , то кривая распределения более плосковершинная.

**Пример:** Случайная величина задана функцией:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x < -2 \\ (-1/4)x^3, & \text{при } -2 \leq x \leq 0 \\ 0, & \text{при } x > 0 \end{cases}$$

Найти: А-? коэффициент-т асимметрии  
Е-? эксцесс

**Вычислим начальные моменты до 4-го порядка:**

$$\nu_1 = M(x) = -\frac{1}{4} \int_{-2}^0 x^4 dx = -\frac{1}{4} \cdot \frac{x^5}{5} \Big|_{-2}^0 = -1,6$$

$$\nu_2 = M(x^2) = -\frac{1}{4} \int_{-2}^0 x^5 dx = -\frac{1}{4} \cdot \frac{x^6}{6} \Big|_{-2}^0 = \frac{8}{3} \approx 2,67$$

$$\nu_3 = M(x^3) = -\frac{1}{4} \int_{-2}^0 x^6 dx = -\frac{1}{4} \cdot \frac{x^7}{7} \Big|_{-2}^0 = -\frac{32}{7} \approx -4,57$$

$$\nu_4 = M(x^4) = -\frac{1}{4} \int_{-2}^0 x^7 dx = -\frac{1}{4} \cdot \frac{x^8}{8} \Big|_{-2}^0 = 8$$

**Найдем центральные моменты:**

$$\mu_2 = D(x) = v_2 - v_1^2 \approx 2,67 - (-1,6)^2 \approx 0,11$$

$$\mu_3 = v_3 - 3v_1 \cdot v_2 + 2v_1^3 \approx -4,57 - 3 \cdot (-1,6) \cdot 2,67 + 2 \cdot (-1,6)^3 \approx 0,054$$

$$\mu_4 = v_4 - 4v_1 \cdot v_3 + 6v_1^2 \cdot v_2 - 3v_1^4 \approx 8 - 4 \cdot (-1,6) \cdot (-4,57) + 6 \cdot (-1,6)^2 \cdot 2,67 - 3 \cdot (-1,6)^4 \approx 0,1024$$

**Отсюда следует, что**

$$\sigma(x) = \sqrt{D(x)} = \sqrt{0,11} \approx 0,33$$

$$\sigma^3(x) \approx 0,036; \quad \sigma^4(x) \approx 0,0121$$

**Тогда имеем:**

$$A = \frac{\mu_3}{\sigma^3(x)} \approx \frac{0,054}{0,036} \approx 1,5 \Rightarrow \text{кривая}$$

**распределения более полого справа ( $A > 0$ )**

$$E = \frac{\mu_4}{\sigma^4(x)} - 3 \approx \frac{0,1024}{0,0121} - 3 \approx 8,46 - 3 \approx 5,46 \Rightarrow$$

**кривая распределения островершинная ( $E > 0$ ).**

## §32. Основные законы распределения вероятностей случайных величин.

### 1) Биномиальное распределение значений случайной величины.

**Дискретная** случайная величина называется распределенной по биномиальному закону, если его вероятности находятся по формуле Бернулли.

$$P_{k,n} = C_n^k \cdot p^k \cdot q^{n-k}$$

X	0	1	2	...	n
P <sub>i</sub>	$C_n^0 \cdot p^0 \cdot q^n$	$C_n^1 \cdot p^1 \cdot q^{n-1}$	$C_n^2 \cdot p^2 \cdot q^{n-2}$	...	$C_n^n \cdot p^n \cdot q_n^0$

Название “биномиальный” происходит от того, что формула Бинома – Ньютона имеет вид:

$$(p+q)^n = C_n^0 \cdot p^0 \cdot q^0 + C_n^1 \cdot p \cdot q^{n-1} + \dots + C_n^n \cdot p^n \cdot q^0$$

$$\Sigma p_i = 1$$

$$M(X) = n \cdot p$$

$$D(X) = n \cdot p \cdot q$$

### 2) Распределение Пуассона.

**Дискретная** случайная величина называется распределенной по закону Пуассона, если вероятности его значений находятся по формуле

Пуассона:  $P_{k,n} = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$

X	0	1	2	...	k	...
---	---	---	---	-----	---	-----

$P_i$	$e^{-\lambda}$	$\frac{\lambda^1}{1!}e^{-\lambda}$	$\frac{\lambda^2}{2!}e^{-\lambda}$	$\dots$	$\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$	$\dots$
-------	----------------	------------------------------------	------------------------------------	---------	------------------------------------	---------

$$M(X)=\lambda, D(X)=\lambda$$

### 3) Геометрическое распределение.

Пусть производится “n” независимых испытаний на наступление события А и в каждом испытании вероятность наступления равна p. Испытания заканчиваются как только появляется событие. Таким образом случайная величина X представляет собой число испытаний до 1-го появления события. В этом случае вероятность наступления событий находится по формуле общего члена геометрической прогрессии.

X	0	1	2	...	k
$p_i$	P	$p \cdot q$	$p \cdot q^2$	...	$p \cdot q^k$

$p, p \cdot q, p \cdot q^2, \dots, p \cdot q^k$  – бесконечная геометрическая прогрессия со знаменателем  $0 < q < 1$ .

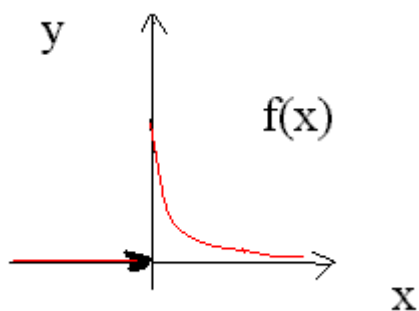
$$M(X) = \frac{1}{p}; \quad D(X) = \frac{1-p}{p}$$

### 4) Показательное распределение.

**Непрерывная** случайная величина считается распределенной по показательному закону, если функция распределения

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & \text{если } x \geq 0 \\ 0, & \text{если } x < 0 \end{cases}$$

график этой функции имеет вид:

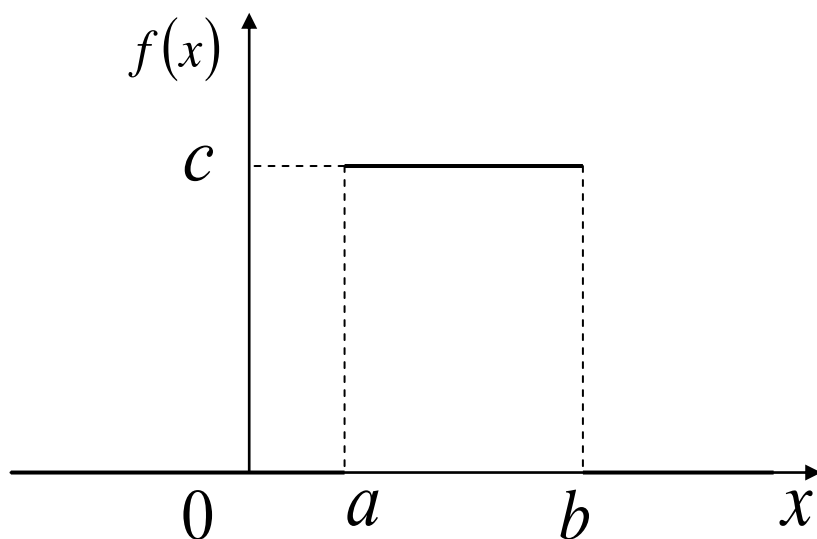


$$M(x) = \frac{1}{\lambda}; \quad D(x) = \frac{1}{\lambda^2}$$

## 5). Равномерное распределение.

**Определение 1.** Непрерывная случайная величина  $X$  имеет равномерное распределение на отрезке  $[a; b]$ , если на этом отрезке плотность распределения вероятностей случайной величины постоянна, т.е. если дифференциальная функция распределения  $f(x)$  имеет вид:

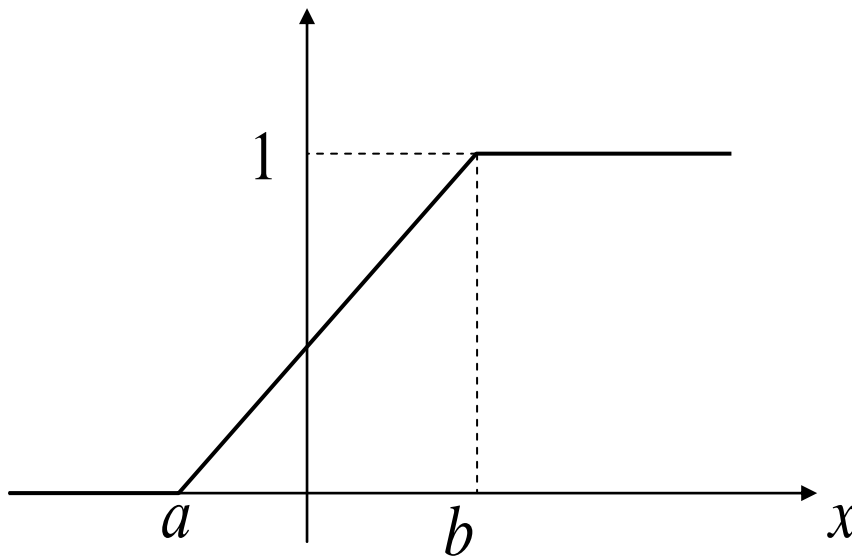
$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x < a \\ \frac{1}{b-a}, & \text{при } a \leq x \leq b \\ 0, & \text{при } x > b \end{cases}$$



$$C = \frac{1}{b - a}$$

**Построим функцию распределения  $F(x)$ .**

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x < a \\ \frac{x - a}{b - a}, & \text{при } a \leq x \leq b \\ 1, & \text{при } x > b \end{cases}$$



**Найдем основные числовые характеристики рассматриваемой случайной величины:**

**1. Математическое ожидание:**

$$M(x) = \frac{a+b}{2}$$

**Математическое ожидание случайной величины, равномерно распределенной на отрезке  $[a; b]$ , совпадает с серединой этого отрезка.**

**2. Дисперсия:**

$$D(x) = \frac{(b-a)^2}{12}$$

### 3. Среднее квадратическое отклонение:

$$\sigma(x) = \frac{b-a}{2\sqrt{3}}$$

**Равномерный закон распределения** используется при анализе ошибок округления при проведении числовых расчетов.

**Пример:** Поезда метрополитена идут регулярно с интервалом 2 мин. Пассажир выходит на платформу в случайный момент времени. Какова вероятность того, что ждать пассажиру придется не больше полминуты.

**X** - время ожидания поезда;  $[0; 2]$  - отрезок времени ожидания

$$c = \frac{1}{b-a} = \frac{1}{2-0} = \frac{1}{2} \Rightarrow f(x) = \frac{1}{2} \Rightarrow$$

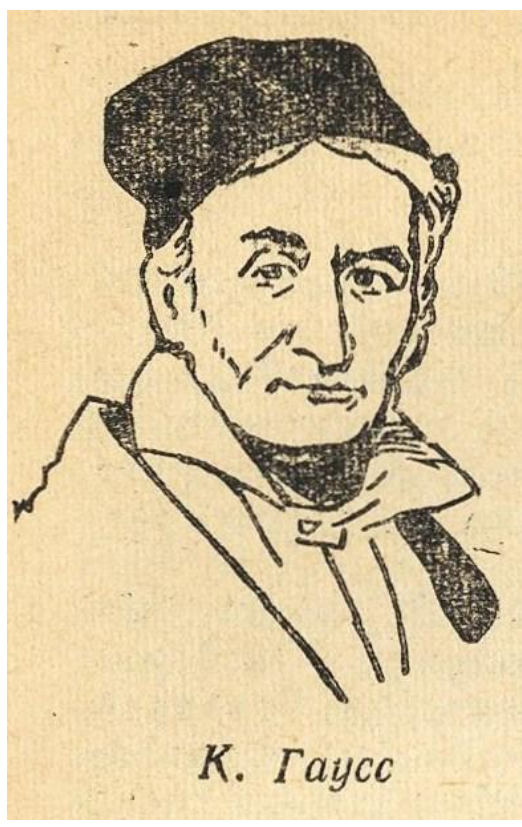


случайная величина имеет равномерный закон распределения на отрезке  $[0; 2]$ .

Поэтому вероятность того, что пассажиру придется ждать не более полминуты равна:

$$P(x \leq 0,5) = \int_0^{0,5} \frac{1}{2} dx = \frac{1}{2} x \Big|_0^{0,5} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

### §33. Нормальное распределение. (Закон распределения Гаусса).



Нормальный закон распределения является предельным законом, к которому приближаются другие законы распределения при часто встречающихся аналогичных условиях.



Нормальному закону подчиняются только непрерывные случайные величины. Значит, это распределение можно задать в виде плотности вероятности.

**Определение 1.** Непрерывная случайная величина  $X$  имеет нормальное распределение (распределена по нормальному закону), если плотность распределения вероятности  $f(x)$  имеет вид:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma \cdot \sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}, \text{ где}$$

**$a$ -математическое ожидание** и  **$\sigma$  - среднее квадратическое отклонение.**

По формуле  $F(x) = \int_{-\infty}^x f(x) dx$  функция распределения примет вид

$$F(x) = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} \cdot \int_{-\infty}^x e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} dx$$

**Определим основные числовые характеристики нормального распределения:**

**1. Математическое ожидание**

$$M(x) = a$$

**2. Дисперсия**

$$D(x) = \sigma^2$$

**Определение 3.** Дисперсия нормально распределенной случайной величины  $X$  равна квадрату среднего квадратического отклонения.

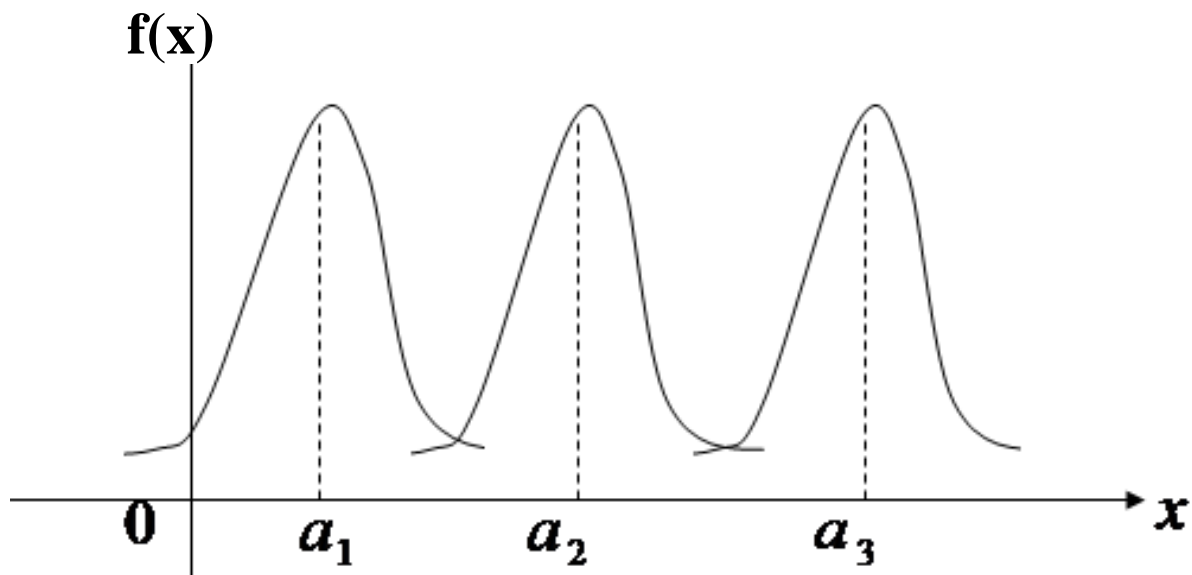
**Пример:** Найти математическое ожидание и дисперсию случайной величины, распределенной по нормальному закону, если

$$f(x) = \frac{1}{7 \cdot \sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(x-5)^2}{2 \cdot 7^2}}$$

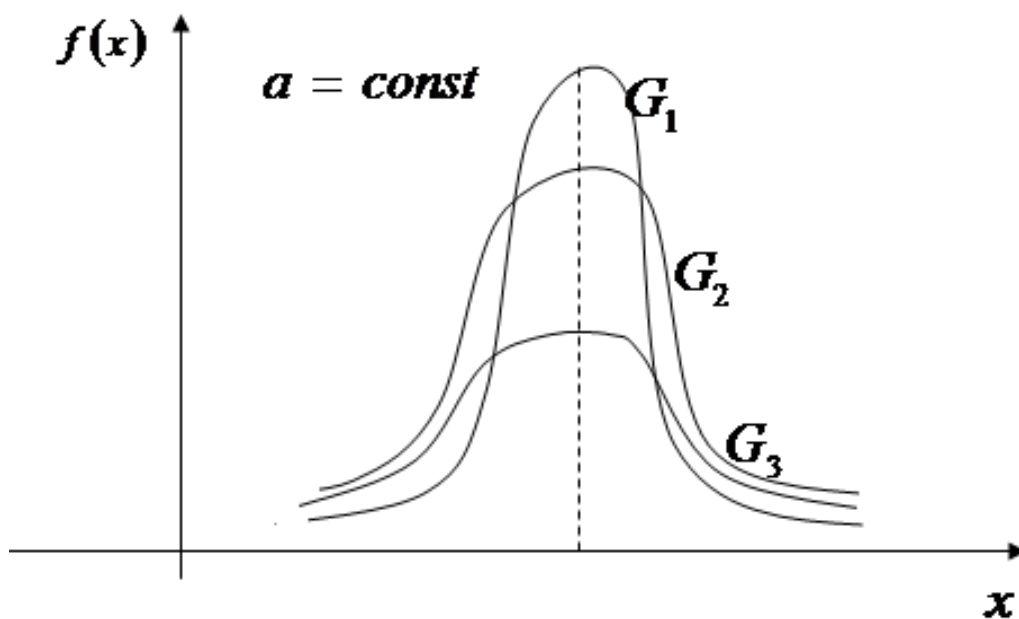
**Ответ:**  $M(x)=5$ ,  $D(x)=49$

График плотности нормального распределения имеет колоколообразную форму. Эта форма является отличительной чертой нормального распределения. Ее называют *кривой Гаусса*.

При изменении параметров  $a$  и  $\sigma$  будет меняться нормальная кривая.



Если  $\sigma = \text{const}$  и  $a_1 < a_2 < a_3$  и меняется параметр  $a$  ( $a_1 < a_2 < a_3$ ), т.е. центр симметрии распределения, то нормальная кривая будет смещаться вдоль оси абсцисс, не меняя формы.



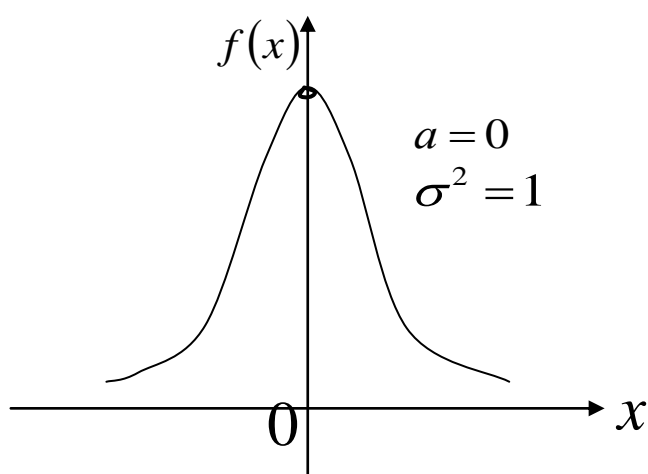
Если  $a = \text{const}$  и меняется параметр  $\sigma$  ( $\sigma_1 < \sigma_2 < \sigma_3$ ), то меняется ордината

максимума кривой  $f_{\max}(a) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}$ . При увеличении  $\sigma$  ордината максимума кривой уменьшается, но так как  $S$  под любой кривой должна оставаться  $= 1$ , то кривая становится

более плоской, растягиваясь вдоль оси абсцисс; при уменьшении  $\sigma$  - нормальная кривая вытягивается вверх, одновременно сжимаясь с боков.

Таким образом, параметр  $a = M(x)$  характеризует положение, а  $\sigma^2(D(x))$  форму нормальной кривой.

**Определение 4.** Нормальный закон распределения случайной величины с параметрами  $a = 0$  и  $\sigma^2 = 1$ , называется **нормированным**, а соответствующая нормальная кривая – **нормированной**.



### §34. Вероятность попадания нормально распределенной случайной величины в заданный интервал. Правило трех сигм.

Пусть дан интервал  $\alpha < X < \beta$ .  
Вероятность того, что случайная величина,  
подчиненная нормальному закону, попадет в  
этот интервал:

$$P(\alpha < X < \beta) = \Phi\left(\frac{\beta - a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha - a}{\sigma}\right), \text{ где } \Phi(x)$$

– функция Лапласа

#### Правило «трех сигм»:

Если случайная величина имеет нормальное  
распределение, то отклонение этой величины  
от ее математического ожидания по  
абсолютной величине практически не  
превышает утроенного среднего  
квадратического отклонения:

$$a - 3\sigma \leq x \leq a + 3\sigma$$

Пример: Вес вылавливаемых в пруду рыб  
подчиняется нормальному закону со средним



квадратическим отклонением 25г. и математическим ожиданием 375г.

1. Найти вероятность того, что средний вес пойманной рыбы заключается в пределах от 300г до 485г.

2. Определить вес самой большой и самой малой рыбы.

Решение1:

$$P(300 \leq x \leq 485) = \Phi\left(\frac{485 - 375}{25}\right) - \Phi\left(\frac{300 - 375}{25}\right) =$$

$$= \Phi(4) - \Phi(-3) = \Phi(4) + \Phi(3) \approx 0,98$$

2. По правилу «трех сигм»:

$$375 - 3 * 25 \leq X \leq 375 + 3 * 25$$

$$300 \leq X \leq 450$$

### §35. Распределения, связанные с нормальным распределением.

1. Распределение  $\chi^2$  или распределение Пирсона (англ. статистик – 1857- 1936гг.)

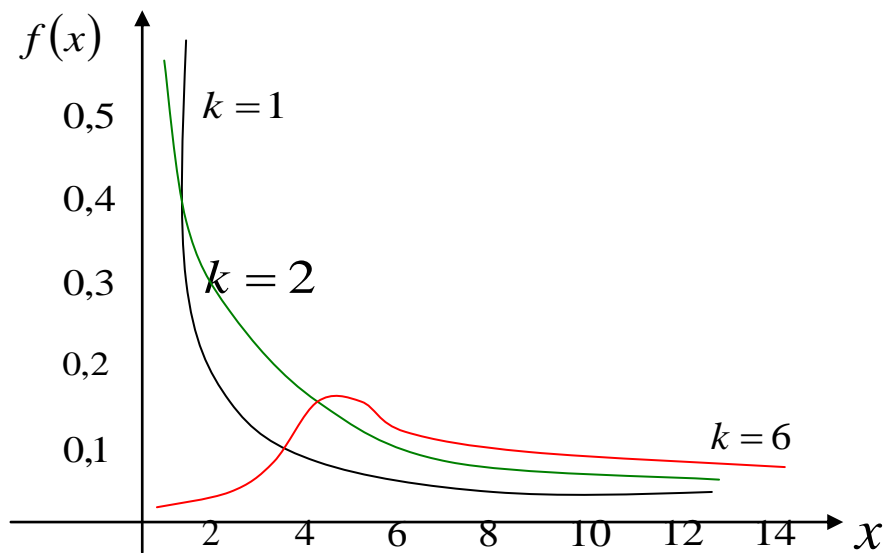


**Определение 1.** Распределением  $\chi^2(k)$  с  $k$  степенями свободы называется **распределение суммы квадратов  $k$  независимых случайных величин, распределенных по стандартному нормальному закону, так как**

$$\chi^2(k) = \sum_{i=1}^k Z_i^2, \text{ где}$$

$Z_i (i = 1, 2 \dots k)$  **имеет нормальное распределение**  $(a = 0; \sigma^2 = 1)$

Число  $k$  является параметром  $\chi^2(k)$  распределения. Число степеней свободы определяют как разность между числом суммируемых случайных величин и числом линейных связей, ограничивающих свободу изменения этих величин. Так как в сумме  $(z_1^2 + z_2^2 + \dots + z_k^2)$  слагаемые независимы, то число степеней свободы равно числу слагаемых, т.е.  $k$ .



**Графики Пирсона** при  $k = 1, 2, 6$  приведены на чертеже. Они показывают, что

$\chi^2$  - распределение асимметрично и обладает правосторонней асимметрией ( $A > 0$ ). При  $k > 30$  распределение случайной величины  $z = 2\chi^2 - \sqrt{2k}$  близко к стандартному нормальному закону ( $a = 0; \sigma^2 = 1$ )  $N(0;1)$

**Определение 2.** Дисперсия величины  $\chi^2(k) = 2k$ , т.е.  $D(\chi^2(k)) = 2k$

**Определение 3.** Если случайные величины  $\chi^2(k_1)$  и  $\chi^2(k_2)$  независимы, то их сумма имеет  $\chi^2$  – распределение с числом степеней свободы  $(k_1 + k_2)$ , т.е.

$$\chi^2(k_1) + \chi^2(k_2) = \chi^2(k_1 + k_2)$$

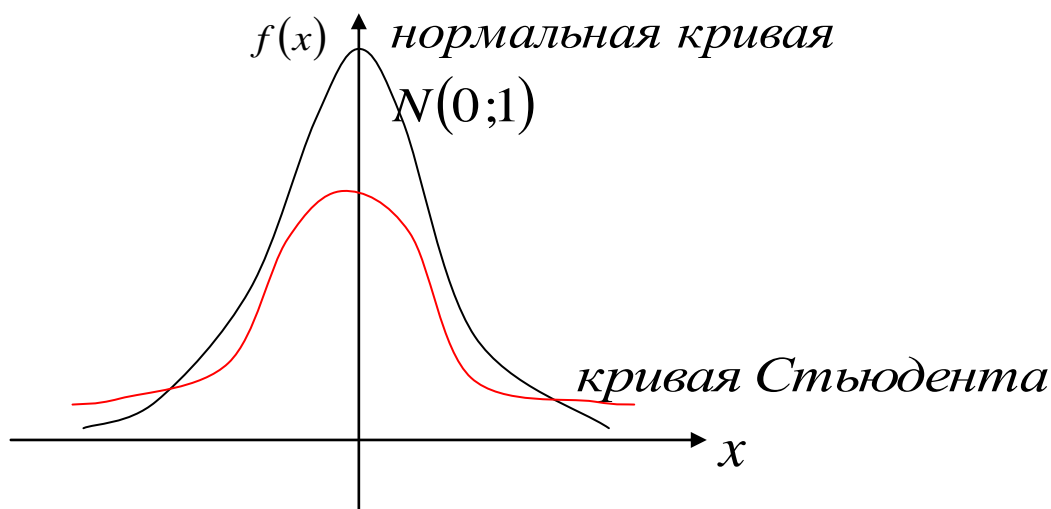
## 2. Распределение Стьюдента (псевдоним англ. статиста В. Госсета) или t-распределение.

**Определение 4.** Распределением Стьюдента называется распределение случайной величины **Z**:

$$t(k) = \frac{Z}{\sqrt{\frac{\chi^2(k)}{k}}}, \text{ где}$$

**Z** - случайная величина, распределенная по стандартному нормальному закону, т.е.  $N(0;1)$

$\chi^2(k)$  – независимая от **Z** случайная величина, имеющая  $\chi^2$  - распределения с **k**-степенями свободы.



Кривая  $t(k)$  - распределения с  $k$  степенями свободы симметрична оси ординат, но по сравнению с нормальной, более пологая. При  $k \rightarrow \infty$   $t$  - распределение приближается к нормальному. При  $k > 30$  можно считать  $t$  - распределение приближенно нормальным.

**Определение 5.** Математическое ожидание случайной величины, имеющей

$t$  - распределение, в силу симметрии ее кривой

распределения  $= 0$ , а ее дисперсия  $= \frac{k}{k-2}$ , т.е.

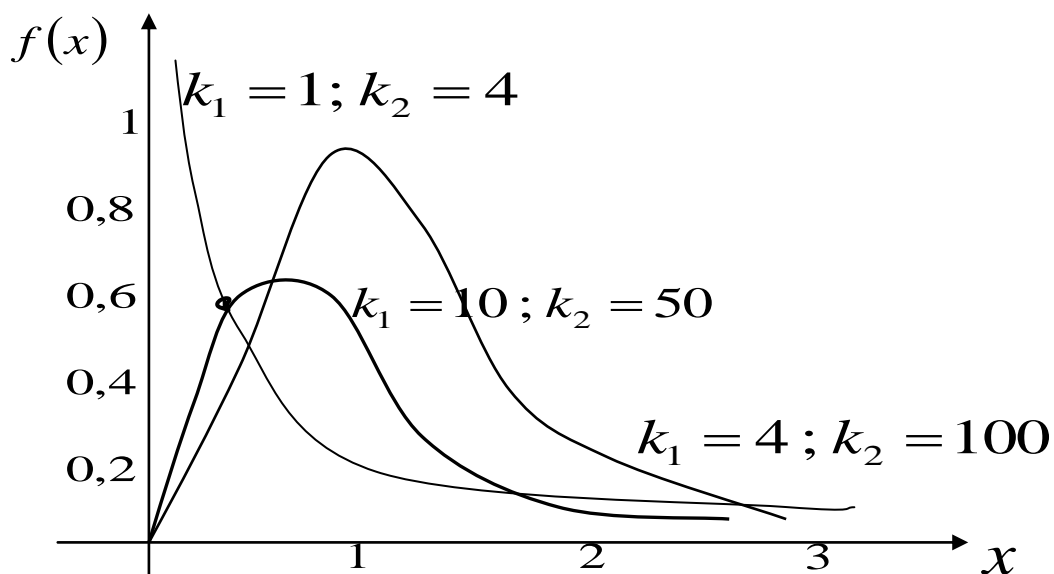
$$\boxed{M(t) = 0} \quad \boxed{D(t) = \frac{k}{k-2}}$$

### 3. Распределение Фишера (англ. статистик) или F-распределение.

**Определение 6.** Распределением Фишера называется распределение случайной величины:

$$F(k_1; k_2) = \frac{\frac{1}{k_1} \cdot \chi^2(k_1)}{\frac{1}{k_2} \cdot \chi^2(k_2)}, \text{ где}$$

$\chi^2(k_1)$  и  $\chi^2(k_2)$  - независимые случайные величины, имеющие  $\chi^2$  - распределение соответственно с  $k_1$  и  $k_2$  степенями свободы. Так как случайные величины  $\chi^2(k_1) \geq 0$  и  $\chi^2(k_2) \geq 0$ , то и  $F(k_1; k_2) \geq 0$ .



При  $k \rightarrow \infty$   **$F$ -распределение** приближается к нормальному закону.

### §36 Закон больших чисел и предельные теоремы.

Под законом больших чисел в широком смысле понимается общий принцип, согласно которому, по формулировке акад. Колмогорова А.Н., совокупное действие большого числа случайных факторов приводит (при некоторых весьма общих условиях) к результату почти не зависящему от случая.

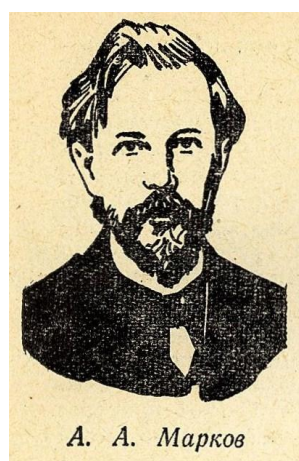
Другими словами, при большом числе случайных величин их средний результат перестает быть случайным и может быть предсказан с большой степенью определенности.

Под законом больших чисел в узком смысле понимается ряд математических теорем, в каждой из которых для тех или иных условий устанавливается факт приближения средних характеристик большого числа испытаний к некоторым определенным постоянным. К ним относятся теорема Чебышева, теорема Маркова, теорема Чебышева-Маркова.

### Теорема Чебышева - Маркова.



П. Л. Чебышев



А. А. Марков

Теорема 1. При достаточно большом числе независимых случайных величин  $X_1, X_2 \dots X_n$ ,

дисперсия каждой из которых не превышает одного и того же постоянного числа  $B$ , для произвольного сколь угодно малого числа  $\epsilon$  справедливо неравенство:

$$P\left(\left|\frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n} - \frac{\sum_{i=1}^n M(X_i)}{n}\right| \leq \epsilon\right) > 1 - \frac{B}{\epsilon^2 n}$$

Среднее арифметическое случайных величин при возрастании их числа проявляет свойство устойчивости, т.е. стремится по вероятности к неслучайной величине, которой является среднее арифметическое математических ожиданий этих величин.

**Пример:** Для определения средней урожайности культуры взято на выборку с площади  $n=2000$ га по  $1\text{м}^2$  с каждого гектара. С какой вероятностью можно ожидать, что средняя **выборочная** урожайность культуры будет отличаться от среднего **истинного** урожая этой культуры не более, чем на 0,25ц, если дисперсии не превышают 4,5.

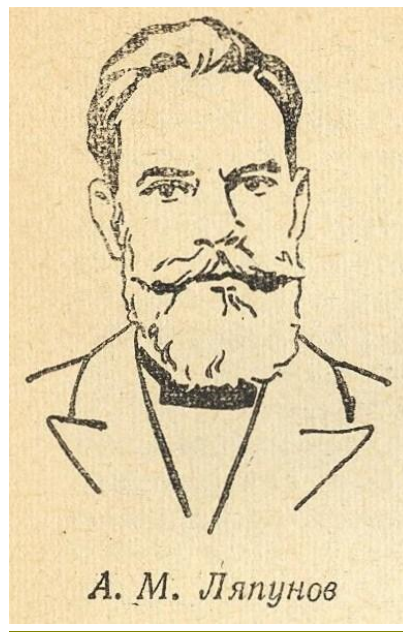
**Решение:**  $n=2000$ га,  $\epsilon=0,25$ ,  $B=4,5$ .



$$P\left(\left|\frac{\sum_{i=1}^{2000} X_i}{2000} - \frac{\sum_{i=1}^{2000} M(X_i)}{2000}\right| \leq \varepsilon\right) > 1 - \frac{4,5}{0,25^2 * 2000} \approx 0,964$$

**Итак,  $P > 0.964$**

### **§37. Центральная предельная теорема Ляпунова.**



**Рассмотренный выше закон больших чисел устанавливает факт приближения средней большого числа случайных величин к определенным постоянным. Центральная предельная теорема состоит из группы теорем, устанавливающих связь между**

**законом распределения суммы случайных величин и его предельной формой - нормальным законом распределения.**

**Среди этих теорем важнейшее место принадлежит теореме Ляпунова.**

**Теорема Ляпунова** Если  $X_1, X_2 \dots X_n$  - независимые случайные величины, у каждой из которых существует математическое ожидание  $M(X_i) = a_i$ , дисперсия  $D(X_i) = \sigma_i^2$ , и

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{i=1}^n \mu_i}{\left( \sum_{i=1}^n \sigma_i^2 \right)^{\frac{3}{2}}} = 0, \text{ где } \mu_i = M(|X_i - M(x_i)|^3)$$

то закон распределения суммы  $S_n = X_1 + X_2 + \dots + X_n$  при  $n \rightarrow \infty$  неограниченно приближается к нормальному

с математическим ожиданием  $\sum_{i=1}^n a_i$  и

дисперсией  $\sum_{i=1}^n \sigma_i^2$ .

